Mecánica

1.er EXAMEN PARCIAL (24 de Noviembre de 2001)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

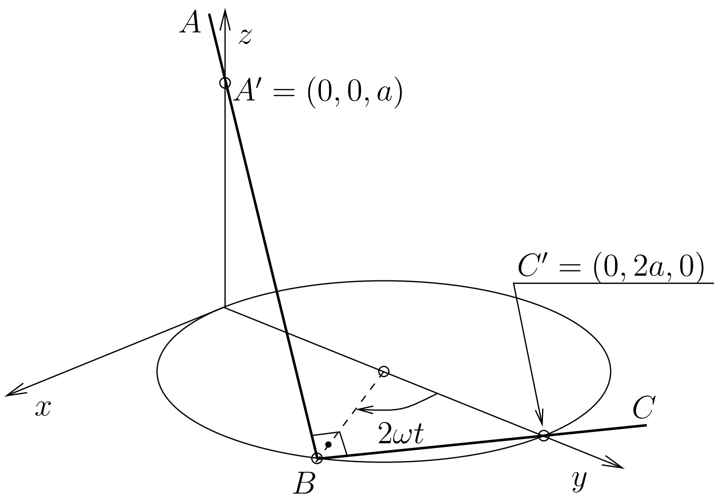
Ejercicio 2.º Tiempo: 60 min.

Una escuadra rígida ABC (siendo $\widehat{ABC} = \pi/2$) se mueve de forma que su vértice B recorre la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0; \quad z = 0,$$

con velocidad constante $2a\omega$. Además las varillas BC y BA pasan siempre por los puntos fijos $C' = (0, 2a, 0)$ y $A' = (0, 0, a)$ respectivamente. Del movimiento así definido se pide:

1. Velocidad angular de la varilla BC en su movimiento plano; velocidad de los puntos de la escuadra que coinciden sobre los puntos A' y C'.
2. Velocidad angular de la escuadra, expresando sus componentes en ejes fijos y en unos ejes ligados a la misma (móviles); eje del movimiento helicoidal tangente.
3. Aceleración angular de la escuadra y aceleración del punto de la misma que coincide sobre A'.



1.— La velocidad del punto de la recta BC sobre el punto fijo C' ha de llevar necesariamente la dirección de la recta BC, para que se mantenga la condición dada. Una manera de razonar esto es pensar en el movimiento inverso, del punto C' (ahora considerado como móvil) respecto a la recta BC (ahora considerada como fija). Se trataría del movimiento de un punto sobre una recta fija, que obviamente debe llevar la velocidad según la propia recta. Pues bien, la velocidad del punto de la recta sobre C' será esta misma velocidad pero cambiada de signo, por tanto llevará también la dirección de la recta BC.

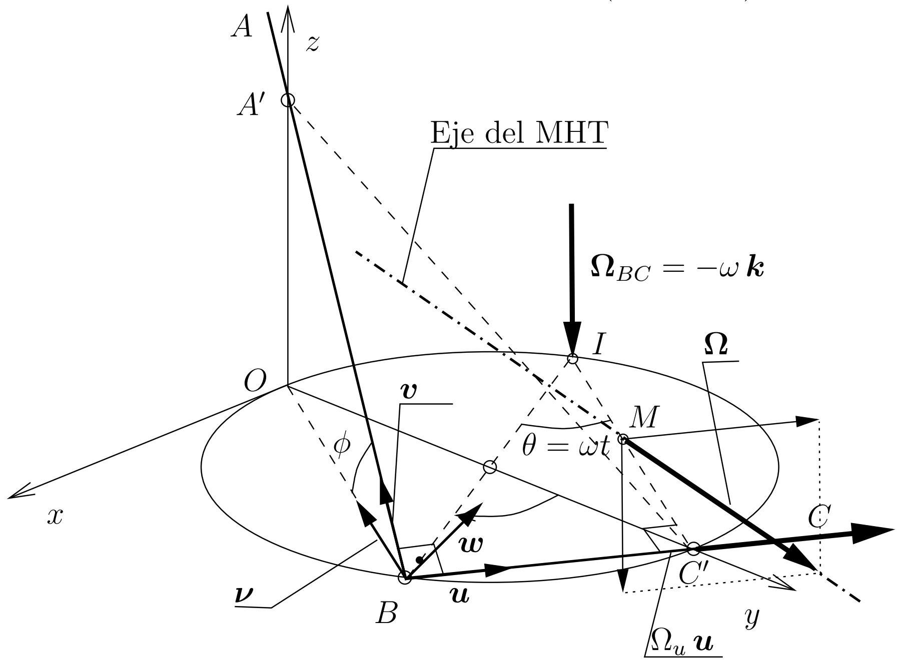
El movimiento plano de BC será una rotación instantánea alrededor del punto I que se obtiene como intersección del radio de la circunferencia por B (normal a $\boldsymbol{v}_B$) y de la normal a BC por C'. Por las propiedades del arco capaz de $\pi/2$ el punto I se sitúa diametralmente opuesto a B (véase figura a continuación). La velocidad de rotación de este movimiento se obtiene entonces de manera inmediata, al conocerse $v_B = 2a\omega$:

$$\Omega_{BC} = \frac{-v_B}{2a} = -\omega \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega}_{BC} = -\omega\,\boldsymbol{k}.$$

Para simplificar las expresiones, en lo que sigue llamaremos $\theta = \omega t$. Considerando la rotación alrededor del CIR, la velocidad del punto sobre C' es

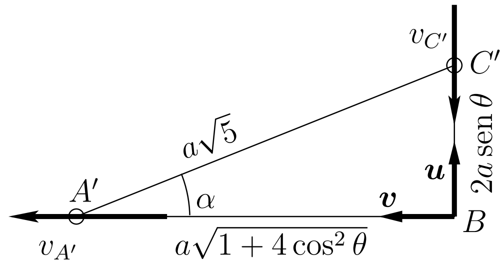
$$\boldsymbol{v}_{C'} = -\omega\,\overline{IC'}\,\boldsymbol{u} = -2a\omega\cos\theta\,\boldsymbol{u},$$

donde se emplea el versor $\boldsymbol{u}$ en dirección de la recta BC (ver figura).



Además, se definen los versores $\boldsymbol{v}$ según BA y $\boldsymbol{w}$ normal al plano de la escuadra, formando un triedro $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ ligado a la misma. Por otra parte, emplearemos también el versor $\boldsymbol{\nu}$ en el plano Oxy según $C'I$, formando el triedro $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k})$ también móvil pero no ligado a la escuadra.

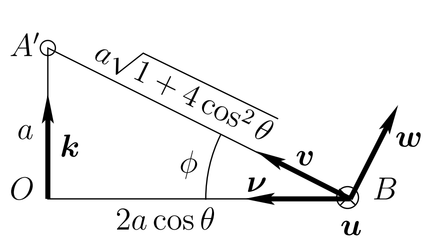
Para calcular la velocidad del punto sobre A' empleamos la propiedad de *equiproyectividad* del campo de velocidades, entre los puntos A' y C'. Para ello nos referimos al dibujo adjunto que representa el plano $BC'A'$ abatido, donde $BC' = 2a\operatorname{sen}\theta$, $BA' = a\sqrt{1+4\cos^2\theta}$ y por consiguiente $C'A' = a\sqrt{5}$. Proyectando resulta:



$$v_{A'}\cos\alpha = v_{C'}\operatorname{sen}\alpha \quad \Rightarrow \quad v_{A'} = 2a\omega\cos\theta\frac{2a\operatorname{sen}\theta}{a\sqrt{1+4\cos^2\theta}};$$

$$\boldsymbol{v}_{A'} = \frac{2a\operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{1+4\cos^2\theta}}\,\boldsymbol{v}.$$

2.— La velocidad de la escuadra se compone, además de la velocidad angular ya calculada alrededor de Iz, de una rotación alrededor de la recta BC. Para ello nos fijamos en el ángulo ϕ que forma la escuadra con el plano Oxy, como puede verse en la figura adjunta que representa el triángulo BOA' en verdadera magnitud:



$$\phi = \arctan\left(\frac{a}{2a\cos\theta}\right) \quad \Rightarrow \quad \Omega_u = \dot{\phi} = \frac{2\omega\operatorname{sen}\theta}{1+4\cos^2\theta}.$$

Por tanto, la velocidad angular total es

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{2\omega\operatorname{sen}\theta}{1+4\cos^2\theta}\,\boldsymbol{u} - \omega\,\boldsymbol{k}, \tag{1}$$

siendo las expresiones en los triedros móvil y fijo respectivamente

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega} &= \omega\left(\frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+4\cos^2\theta}\,\boldsymbol{u} - \frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2\theta}}\,\boldsymbol{v} - \frac{2\cos\theta}{\sqrt{1+4\cos^2\theta}}\,\boldsymbol{w}\right),\\ &= \omega\left(\frac{-2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{1+4\cos^2\theta}\,\boldsymbol{i} + \frac{2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{1+4\cos^2\theta}\,\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}\right).\end{aligned}$$

El movimiento instantáneo es un caso general de rotación más deslizamiento, al ser la composición de dos rotaciones que se cruzan. El eje del Movimiento Helicoidal tangente (MHT) es paralelo a $\mathbf{\Omega}$ y pasará por un punto determinado M de la recta de mínima distancia $C'I$. Para calcular este punto aplicamos la fórmula a partir de C',

$$\boldsymbol{r}_{C'M} = \frac{\mathbf{\Omega}\wedge\boldsymbol{v}_{C'}}{\Omega^2} = \frac{2a\cos\theta}{1+4\,\mathrm{sen}^2\,\theta/(1+4\cos^2\theta)^2}\,\boldsymbol{\nu}.$$

3.— Para determinar la aceleración angular derivamos la expresión (1), expresada en el triedro $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{k})$. Para ello tenemos en cuenta la derivada relativa más el término complementario por la rotación $(-\omega\,\boldsymbol{k})$ de este triedro:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{\Omega}} &= \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rel}} - \omega\,\boldsymbol{k}\wedge\mathbf{\Omega}\\ &= \frac{2\omega^2\cos\theta}{(1+4\cos^2\theta)^2}(9-4\cos^2\theta)\,\boldsymbol{u} - \frac{2\omega^2\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+4\cos^2\theta}\,\boldsymbol{\nu}.\end{aligned}$$

La aceleración del punto sobre A' se calcula mediante la fórmula general

$$\boldsymbol{a}_{A'} = \boldsymbol{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}}\wedge\boldsymbol{r}_{BA'} + \mathbf{\Omega}\wedge(\mathbf{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{BA'}).$$

Desarrollando los términos de la expresión anterior,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_B &= 4a\omega^2(\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{u} + \cos\theta\,\boldsymbol{\nu});\\ \boldsymbol{r}_{BA'} &= a\sqrt{1+4\cos^2\theta}\,\boldsymbol{v};\\ \dot{\mathbf{\Omega}}\wedge\boldsymbol{r}_{BA'} &= \frac{a\omega^2}{\sqrt{1+4\cos^2\theta}}\left[\frac{2\cos\theta}{1+4\cos^2\theta}(9-4\cos^2\theta)\,\boldsymbol{w} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{1+4\cos^2\theta}}\,\boldsymbol{u}\right];\\ \mathbf{\Omega}\wedge(\mathbf{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{BA'}) &= a\omega^2\left[-2\cos\theta\,\boldsymbol{\nu} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+4\cos^2\theta}\,\boldsymbol{u} - \frac{4\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{(1+4\cos^2\theta)^{3/2}}\,\boldsymbol{v}\right].\end{aligned}$$

Sumando componentes en el triedro $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{k})$ resulta

$$\boldsymbol{a}_{A'} = 4a\omega^2\left[\frac{4\,\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta}{1+4\cos^2\theta}\,\boldsymbol{u} + \frac{2\cos\theta(4\cos^4\theta+4\cos^2\theta-3)}{(1+4\cos^2\theta)^2}\,\boldsymbol{\nu} - \frac{4\cos^4\theta-10\cos^2\theta+1}{(1+4\cos^2\theta)^2}\,\boldsymbol{k}\right],$$

o bien, en los triedros de la escuadra $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ o fijo $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$,

$$\boldsymbol{a}_{A'} = 4a\omega^2\left[\frac{4\,\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta}{1+4\cos^2\theta}\,\boldsymbol{u} + \frac{4\cos^4\theta+2\cos^2\theta-1}{(1+4\cos^2\theta)^{3/2}}\,\boldsymbol{v} + \frac{4\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cos\theta}{(1+4\cos^2\theta)^{3/2}}\,\boldsymbol{w}\right].$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{A'} = 4a\omega^2\Bigg[&-6\frac{(4\cos^4\theta+2\cos^2\theta-1)\cos\theta\sin\theta}{(1+4\cos^2\theta)^2}\,\boldsymbol{i} - 2\frac{(12\cos^4\theta-2\cos^2\theta-5)\cos^2\theta}{(1+4\cos^2\theta)^2}\,\boldsymbol{j}\\ &-\frac{4\cos^4\theta-10\cos^2\theta+1}{(1+4\cos^2\theta)^2}\,\boldsymbol{k}\Bigg].\end{aligned}$$