Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

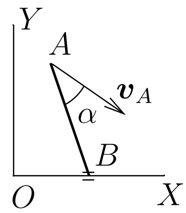
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (22 de Enero de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos partiendo de las ecuaciones, mientras que si se pide *deducir* es necesario justificar todos los resultados. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no deberá entregarse.

Definir los conceptos de enlace holónomo y enlace anholónomo. *Aplicación*: Un segmento AB de longitud l se mueve de manera que el extremo B recorre el eje X de un sistema de referencia ortonormal OXY, y la velocidad del extremo A forma un ángulo constante α con dicho segmento. Empleando como parámetros la coordenada x del extremo B y el ángulo θ que forma AB con el eje Y, obtener la ecuación de ligadura correspondiente a la velocidad del extremo A y decir de que tipo es. (5 ptos.)



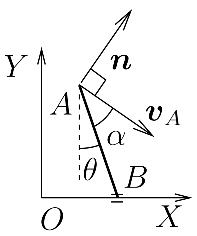
Los enlaces (mecanismos que restringen el movimiento de un sistema) se pueden clasificar, entre otros criterios, en *holónomos* y *anholónomos.* Se consideran holónomos cuando es posible expresar la condición de ligadura mediante una relación entre las posiciones de las partículas (o bien las coordenadas generalizadas) y el tiempo exclusivamente:

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots \boldsymbol{r}_N, t) = 0, \quad \text{ó bien} \quad \widehat{\boldsymbol{\Phi}}(q_1, q_2, \dots q_n, t) = 0 \tag{1}$$

Los enlaces anholónomos son en general aquellos que no son holónomos, no pudiéndose expresar mediante ecuaciones del tipo (1). El caso más usual de enlace anholónomo es aquel que depende también de las velocidades, mediante relaciones del tipo:

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t) = 0 \ \ (i = 1, \dots N), \quad \text{ó bien} \quad \widehat{\boldsymbol{\Phi}}(q_j, \dot{q}_j, t) = 0 \ \ (j = 1, \dots n) \tag{2}$$

Aplicación:



La velocidad de A en términos de los parámetros x, θ y sus derivadas es:

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + \dot{\theta}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{BA} = (\dot{x} - l\dot{\theta}\cos\theta)\,\boldsymbol{i} - l\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{j}, \tag{3}$$

siendo $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ los versores de los ejes OXY de la figura. Esta velocidad debe ser normal al vector $\boldsymbol{n} = \cos(\theta + \alpha)\,\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}(\theta + \alpha)\,\boldsymbol{j}$. Desarrollando el producto escalar,

$$0 = \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{n} = \dot{x}\cos(\theta + \alpha) - l\dot{\theta}\cos\alpha. \tag{4}$$

En principio pudiera parecer que la ecuación resultante (4) define un enlace anholónomo ya que está formulada en función de las velocidades. Sin embargo, admite una integral directa:

$$x = l\cos\alpha \int \frac{\dot{\theta}}{\cos(\theta + \alpha)}\,\mathrm{d}t = l\cos\alpha \ln\left(\sec(\theta + \alpha) + \mathrm{tg}(\theta + \alpha)\right) + C. \tag{5}$$

Por lo tanto, la ecuación de ligadura es (5) y corresponde a un enlace *holónomo.*

Un oscilador lineal se mueve de acuerdo con la ecuación diferencial $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$. *Definir* y *justificar* la estructura de la solución más general de esta ecuación. *Aplicar* a un oscilador con amortiguamiento nulo ($c = 0$), al que estando en reposo se le aplica repentinamente una fuerza constante $f(t) = f_0$ (función escalón). (5 ptos.)

La solución más general de la ecuación diferencial dada se puede expresar en la forma:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{6}$$

siendo $x_h(t)$ la solución general de la ecuación homogenea: $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$. La expresión de x_h, para valores del amortiguamiento c inferiores al de amortiguamiento crítico, es:

$$x_h(t) = Ae^{-\frac{c}{2m}t} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} + \varphi_0\right) \tag{7}$$

siendo A y φ_0 constantes que dependen de las condiciones iniciales. Asimismo $x_p(t)$ es una solución particular de la ecuación completa que por lo tanto cumple: $m\ddot{x}_p(t)+c\dot{x}_p(t)+kx_p(t) = f(t)$, y que no depende de las condicones iniciales.

En el ejemplo del enunciado, la ecuación diferencial es: $m\ddot{x} + kx = f_0$ con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$, siendo x el alargamiento del muelle a partir de la posición de equilibrio. La solución general es:

$$x(t) = \underbrace{A \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right)}_{x_h(t)} + \underbrace{\frac{f_0}{k}}_{x_p(t)} \tag{8}$$

La constantes A y φ_0 se obtienen imponiendo las condiciones iniciales en (8):

$$0 = A \operatorname{sen}\varphi_0 + \frac{f_0}{k} \tag{9}$$

$$0 = A\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\varphi_0 \tag{10}$$

Resolviendo este sistema y sustituyendo en (8) resulta $\varphi_0 = \pi/2$ y $A = -f_0/k$, por lo que finalmente:

$$x(t) = -\frac{f_0}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{f_0}{k} \tag{11}$$

En el gráfico adjunto se dibuja la solución dinámica obtenida (x_{din}), y se compara con el término f_0/k que puede interpretarse como la solución estática (x_{est}) que se produciría de no haber efectos dinámicos.