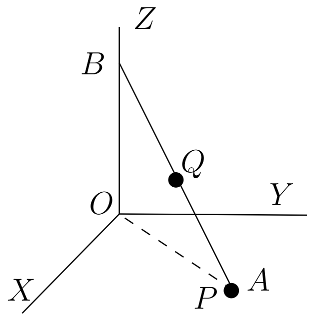
Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (22 de enero de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/25) Tiempo: 60 min.

Un sistema está constituido por dos partículas iguales P y Q de masa m. Ambas partículas están unidas por una varilla AB de longitud b y masa despreciable, de forma que el extremo A se mantiene sobre un plano horizontal liso, mientras el extremo B recorre un eje vertical liso. La partícula P se encuentra unida al extremo A y la partícula Q se encuentra unida al punto medio de la varilla.
Se abandona el sistema siendo el ángulo $\angle OBA = 30°$ y teniendo A una velocidad horizontal de valor v_0, perpendicular a AB.



Se pide:

1. Valor del módulo de la velocidad de la partícula Q cuando la varilla forma 60° con la vertical.

2. Expresión de la reacción en el extremo A en un instante genérico.

⋆

1. El sistema tiene dos grados de libertad, que se representan mediante los ángulos θ y φ tal y como muestra la Figura 1. El ángulo θ es el que forma la varilla con la vertical, y φ el que forma su proyección horizontal con el eje X fijo.

Puesto que el enunciado pide únicamente la velocidad en un cierto instante, resulta conveniente identificar integrales primeras del movimiento, que son:

- Conservación de la energía total, puesto que todas las fuerzas que trabajan sobre el sistema son conservativas;

- Conservación de la componente vertical del momento cinético total respecto del origen del sistema fijo.

Para el cálculo de ambas integrales primeras es necesario previamente expresar las velocidades de las dos partículas P y Q. Para ello resulta conveniente emplear un sistema de referencia auxiliar móvil $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, de forma que el versor $\boldsymbol{i}$ se encuentra en la proyección de la varilla sobre el plano horizontal, el versor $\boldsymbol{k}$ coincide con el eje vertical fijo y el $\boldsymbol{j}$ es perpendicular a los anteriores formando un triedro a derechas (ver Figura 1).

Las componentes de la velocidad de la partícula P en el sistema móvil coinciden con las correspondientes en polares:

$$\boldsymbol{v}_P = \dot{r}\boldsymbol{i} + r\dot{\varphi}\boldsymbol{j} = b\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{i} + b\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} \tag{1}$$

La velocidad de la partícula Q puede obtenerse mediante la expresión del campo de velocidades del sólido rígido $\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{v}_P + (\dot{\varphi}\boldsymbol{k} - \dot{\theta}\boldsymbol{j}) \wedge \boldsymbol{PQ}$. No obstante, teniendo en cuenta que nos basta con el módulo de la velocidad, es más sencillo obtenerlo considerando su movimiento absoluto como la composición del relativo y del arrastre. La velocidad relativa se obtiene directamente a partir del CIR (punto I de la Figura 2) del movimiento relativo de

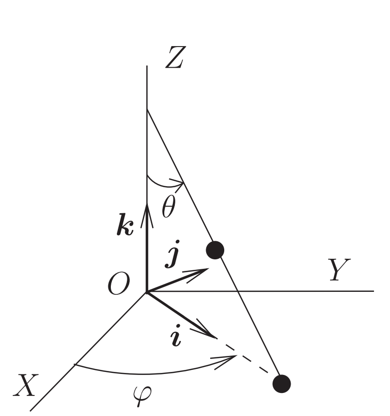


Figura 1: *Definición general del sistema*

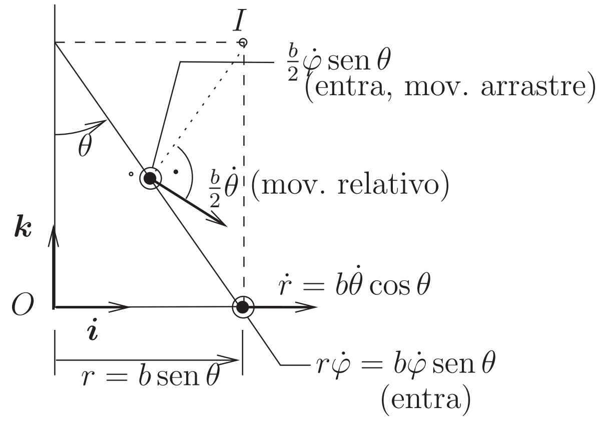


Figura 2: *Vista del sistema en el plano* $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k})$

la varilla, y tiene de módulo $(b/2)\dot\theta$. El movimiento de arrastre es circular de radio $(b/2)\operatorname{sen}\theta$ (ver Figura 2).

Los cuadrados de estas velocidades son:

$$v_P^2 = b^2(\dot\theta^2\cos^2\theta + \dot\varphi^2\operatorname{sen}^2\theta) \quad , \qquad v_Q^2 = \frac{b^2}{4}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\operatorname{sen}^2\theta\right) \tag{2}$$

Otra forma de obtener las velocidades de P y Q sería mediante la derivación de sus correspondientes vectores posición. Si estos vectores se expresan en el sistema fijo, se obtienen directamente las componentes de la velocidad en este sistema. Si los vectores posición se expresan en el sistema móvil, hay que emplear la metodología usual de derivación en ejes móviles.

La expresión de la energía total (constante), tomando el plano OXY como origen de potencial gravitatorio, resulta:

$$E = T_P + T_Q + V_Q = \frac{1}{2}m\left(v_P^2 + v_Q^2\right) + mg\frac{b}{2}\cos\theta \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2}mb^2\dot\theta^2\left(\frac{1}{4} + \cos^2\theta\right) + \frac{5}{8}mb^2\dot\varphi^2\operatorname{sen}^2\theta + mg\frac{b}{2}\cos\theta = E_0 \tag{4}$$

La componente vertical del momento cinético total $\boldsymbol{H}_O$ se puede obtener con la ayuda de la Figura 2, donde se observa que basta con considerar las componentes de las velocidades según el versor $\boldsymbol{j}$ móvil::

$$\boldsymbol{H}_O\cdot\boldsymbol{K} = m(\dot\varphi b\operatorname{sen}\theta)(b\operatorname{sen}\theta) + m\left(\dot\varphi\frac{b}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\left(\frac{b}{2}\operatorname{sen}\theta\right) = \frac{5}{4}mb^2\dot\varphi\operatorname{sen}^2\theta = h \tag{5}$$

Las constantes E_0 y h se calculan a partir de las condiciones iniciales especificadas. Teniendo en cuenta la expresion (1):

$$\boldsymbol{v}_0 = b\dot\theta_0\cos\theta_0\boldsymbol{i} + b\dot\varphi_0\operatorname{sen}\theta_0\boldsymbol{j} = v_0\boldsymbol{j} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\dot\theta_0 = 0\\ \dot\varphi_0 = \dfrac{2v_0}{b}\end{cases} \tag{6}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\theta_0 = 30°$. Introduciendo los valores (6) en (4) y (5) se obtienen (E_0, h) y las expresiones finales de las dos integrales primeras resultan:

$$\frac{1}{2}b^2\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{4}+\cos^2\theta\right)+\frac{5}{8}b^2\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta+g\frac{b}{2}\cos\theta=\frac{5}{8}v_0^2+g\frac{b}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{7}$$

$$b\dot{\varphi}\operatorname{sen}^2\theta=\frac{v_0}{2} \tag{8}$$

Para calcular la velocidad de la partícula Q en la configuración especificada en el enunciado es necesario obtener los valores de $\dot{\theta}$ y $\dot{\varphi}$ para aquella. Introduciendo $\theta_1 = 60°$ en (8) y (7) se obtiene:

$$\dot{\varphi}_1=\frac{2v_0}{3b} \quad , \quad \dot{\theta}_1^2=\frac{5}{3}\frac{v_0^2}{b^2}+\frac{g}{b}(\sqrt{3}-1) \tag{9}$$

Finalmente, introduciendo (9) en la expresión (2) se obtiene el módulo de la velocidad pedida:

$$v_Q^2=\frac{b}{4}\left(2\frac{v_0^2}{b}+g(\sqrt{3}-1)\right)$$

2. La reacción en A es vertical, por lo que la ecuación de cantidad de movimiento en esa dirección resulta:

$$R_A-2mg=m\ddot{z}_Q$$

Teniendo en cuenta que $z_Q=(b/2)\cos\theta$, se obtiene

$$R_A=2mg-m\frac{b}{2}(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta)$$