Mecánica

3.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (6 de abril de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 5/25) Tiempo: 30 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos partiendo de las ecuaciones, mientras que si se pide *deducir* es necesario justificar todos los resultados. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no deberá entregarse.

Sea un sólido $\mathcal{B}$ con densidad uniforme ρ y masa $M = \int_{\mathcal{B}} \rho \, \mathrm{d}V$, con un movimiento general (velocidad $\boldsymbol{v}_G$ de su C.D.M., velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$). **a)** *Desarrollar* de forma razonada la expresión general del momento cinético $\boldsymbol{H}_G$, como una integral extendida a $\mathcal{B}$; **b)** *Justificar*, a partir del resultado anterior, la expresión general del tensor de inercia $\boldsymbol{I}_G$; **c)** Sea el caso práctico de un disco circular de radio R y masa M, expresando las componentes en el triedro ortonormal $Oxyz$, con O el centro del disco, Ox, Oy dos direcciones según diámetros ortogonales del disco y Oz el eje de revolución del mismo. *Obtener* para este caso el tensor de inercia, el momento cinético y la energía cinética para un estado de velocidades genérico ($\boldsymbol{v}_G = (v_x, v_y, v_z)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)^{\mathrm{T}}$). (5 ptos.)

---

a) El movimiento (campo de velocidades) relativo a G queda definido por $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}'$, siendo $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_G$ el vector posición relativo a G de un punto genérico del sólido. El momento cinético es la integral del momento de las cantidades de movimiento, para lo cual se pueden emplear (en el caso de G) tanto las velocidades absolutas ($\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{v}'$) como las relativas ($\boldsymbol{v}'$):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_G &= \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}' \wedge \rho(\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{v}') \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{v}_G \, \rho \mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{v}' \, \rho \mathrm{d}V \\ &= \underbrace{\left(\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}' \, \rho \mathrm{d}V \right)}_{=M\boldsymbol{r}'_G = \boldsymbol{0}} \wedge \boldsymbol{v}_G + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{v}' \, \rho \mathrm{d}V\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{H}_G = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{v}' \, \rho \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}') \, \rho \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} \left(r'^2 \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{r}' \right) \, \rho \mathrm{d}V.$$

b) Sacando la velocidad angular del integrando, la expresión anterior se puede escribir como

$$\boldsymbol{H}_G = \left[\int_{\mathcal{B}} \left(r'^2 \boldsymbol{1} - \boldsymbol{r}' \otimes \boldsymbol{r}' \right) \, \rho \mathrm{d}V \right] \cdot \boldsymbol{\Omega}.$$

$$(H_G)_i = \left[\int_{\mathcal{B}} \left(r'^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j \right) \, \rho \mathrm{d}V \right] \Omega_j.$$

Esta expresión caracteriza al momento cinético en G como una función lineal ($\mathcal{L}$) del vector velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, lo que define un tensor de segundo orden $\boldsymbol{I}_G$:

$$\boldsymbol{H}_G = \mathcal{L}(\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

Por tanto identificamos el tensor de inercia como

$$\boldsymbol{I}_G = \int_{\mathcal{B}} \left(r'^2 \mathbf{1} - \boldsymbol{r}' \otimes \boldsymbol{r}'\right) \, \rho \mathrm{d}V;$$

$$(I_G)_{ij} = \int_{\mathcal{B}} \left(r'^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j\right) \, \rho \mathrm{d}V.$$

Las matriz de componentes en coordenadas cartesianas ortonormales sería por tanto

$$[\boldsymbol{I}_G] = \begin{pmatrix} I_{xx} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{yy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix};$$

las componentes de esta matriz se denominan momentos de inercia y productos de inercia, siendo su expresión general:

$$I_{ii} = \int_{\mathcal{B}} (r'^2 - r'_i)^2 \rho \mathrm{d}V; \quad P_{ij} = \int_{\mathcal{B}} r'_i r'_j \, \rho \mathrm{d}V.$$

c) Cada uno de los tres ejes definidos es de simetría del cuerpo, en cuyo caso es fácil ver que los productos de inercia son nulos: p.ej. si x es de simetría, para toda partícula (x, y, z) existe otra simétrica $(x, -y, -z)$, y las integrales $P_{xy} = \int_{\mathcal{B}} xy \, \rho \mathrm{d}V$ y $P_{xz} = \int_{\mathcal{B}} xz \, \rho \mathrm{d}V$ se anulan. Por tanto el tensor de inercia tendrá una expresión diagonal en dichos ejes (que se denominan *principales de inercia*). Por otra parte, en una placa de espesor despreciable será $z = 0$ y por lo tanto $I_{zz} = \int_{\mathcal{B}} (x^2 + y^2) \, \rho \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} x^2 \, \rho \mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}} y^2 \, \rho \mathrm{d}V = I_{yy} + I_{xx}$. El momento respecto del eje perpendicular por el centro es $C = I_{zz} = \int_0^R 2\pi r (r^2) \, \rho \mathrm{d}r = 2\pi\rho \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2}(\rho \pi R^2) R^2 = \frac{1}{2} M R^2$, y los momentos respecto de los ejes diametrales son iguales entre sí y la mitad del anterior (al ser z de revolución), $I_{xx} = I_{yy} = A = \frac{1}{2} C = \frac{1}{4} M R^2$:

$$[\boldsymbol{I}_G] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} = MR^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

El momento cinético vale

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} = A(\Omega_x \, \boldsymbol{i} + \Omega_y \, \boldsymbol{j}) + C \Omega_z \, \boldsymbol{k}.$$

Por último, la energía cinética es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\Omega}\}^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{I}_G] \{\boldsymbol{\Omega}\} + \frac{1}{2} M v_G^2 \\ &= \frac{1}{2} A (\Omega_x^2 + \Omega_y^2) + \frac{1}{2} C \Omega_z^2 + \frac{1}{2} M \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right). \end{aligned}$$