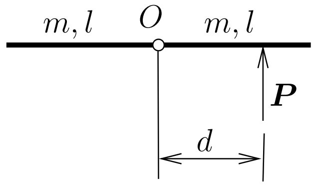
Mecánica

3.er EXAMEN PARCIAL (6 de abril de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/25) Tiempo: 50 min.

Un sistema material está formado por dos barras iguales de masa m y longitud l articuladas entre sí en el punto O, y que pueden moverse libremente sobre un plano horizontal liso. Cuando las barras están alineadas y en reposo, como muestra la figura adjunta, se aplica una percusión P en dirección perpendicular a una de las barras en un punto situado a una distancia d de la articulación.



Se pide:

1. Valor de la distancia d para que el sistema formado por las dos barras adquiera un movimiento como si fuera un único sólido rígido (una única barra de longitud $2l$) a lo largo del movimiento que tiene lugar después de la aplicación de la percusión.

2. Se supone que la percusión P está producida por el impacto de una partícula de masa m que incide perpendicularmente a la barra con una velocidad v. Se observa que cuando la partícula impacta a la distancia d calculada en el apartado anterior queda en reposo inmediatamente después del impacto. Calcular el coeficiente de restitución de éste.

---

1. Una de las formas más sencillas de plantear el problema es estudiar inicialmente las dos barras por separado e imponer posteriormente las condiciones que especifica el enunciado.

En primer lugar se puede justificar que al aplicar la percusión P aparece otra interna en O en dirección normal a las barras (paralela a P). El punto de partida de la justificación consiste en razonar que el centro de masa de la barra que recibe la percusión adquiere una velocidad exclusivamente vertical. Efectivamente, si la barra estuviera aislada (no existiera la otra barra) la velocidad de cualquiera de sus puntos sería vertical, puesto que la percusión lo es. En concreto, la velocidad de O sería vertical, por lo que si este punto estuviera sometido a algún tipo de coacción aparecería una percusión reactiva (I) que sería también vertical. Por otro lado, sobre la barra de la izquierda solo actúa la percusión reactiva vertical, por lo que de nuevo puede razonarse que todos sus puntos adquieren velocidad vertical.

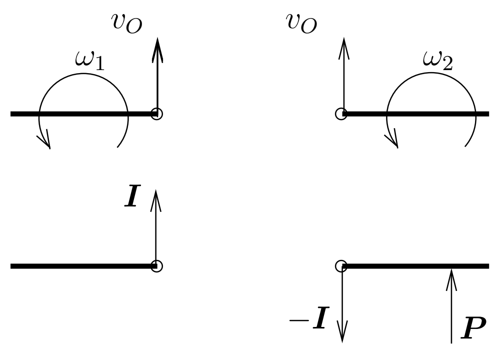


Figura 1: *Diagramas de velocidades y percusiones*

Estableciendo la expresión del principio del momento cinético en los centros de cada una de las barras con la ayuda de la Figura 1 se obtiene:

$$\textit{Barra derecha} \qquad I\frac{l}{2} + P\left(d - \frac{l}{2}\right) = \frac{1}{12}ml^2\omega_2 \tag{1}$$

$$\textit{Barra izquierda} \qquad I\frac{l}{2} = \frac{1}{12}ml^2\omega_1 \tag{2}$$

Imponer que después de la percusión el conjunto se comporte como un único sólido rígido equivale a establecer $\omega_1 = \omega_2$ en (1) y (2), resultando:

$$d = \frac{l}{2}$$

2. En este caso, la percusión P pasa a ser una incógnita, y aparece una nueva que es el coeficiente de restitución e.

Por otro lado se pueden plantear dos ecuaciones adicionales:

$$\textit{Cantidad de movimiento de la partícula} \qquad -P = m(0 - v) \tag{3}$$

$$\textit{Coeficiente de restitución} \qquad e = -\frac{0 - \left(v_O + \frac{l}{2}\omega\right)}{v} \tag{4}$$

siendo $\omega = \omega_1 = \omega_2$. Las ecuaciones (3) y (4) proporcionan explícitamente los valores de P y e respectivamente a partir de v_O y ω. El valor de v_O puede obtenerse de forma inmediata aplicando el principo de cantidad de movimiento al sistema formado por las dos barras, obteniéndose:

$$P = 2mv_O \qquad \Longrightarrow \qquad v_O = \frac{P}{2m} \tag{5}$$

De la ecuación (2) se obtiene el valor de la percusión reactiva $I = ml\omega/6$, y aplicando el principio de cantidad de movimiento a la barra de la izquierda se obtiene:

$$m\left(v_O - \frac{l}{2}\omega\right) = I \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \frac{3P}{4ml} \tag{6}$$

Introduciendo en (3) y (4) los valores de v_O y ω dados en (5) y (6) se obtienen los valores de P y e:

$$P = mv \quad , \qquad e = \frac{7}{8}$$