Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL – EXAMEN FINAL (7 de junio de 2002)

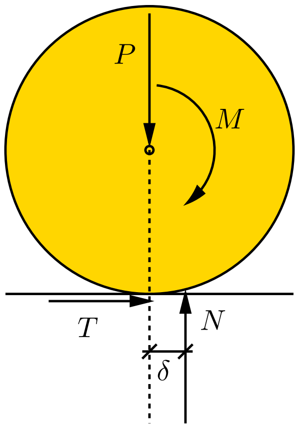
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 5/25–10/60) Tiempo: 30–45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos partiendo de las ecuaciones, mientras que si se pide *deducir* es necesario justificar todos los resultados. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

Discutir el equilibrio de una rueda apoyada sobre una recta horizontal con rozamiento y resistencia a la rodadura, *detallando* las fuerzas de reacción que aparecen y *analizando* las distintas posibilidades de perder el equilibrio al aumentar las fuerzas aplicadas, para los casos de a) rueda motriz; b) rueda remolcada. (5 ptos.)

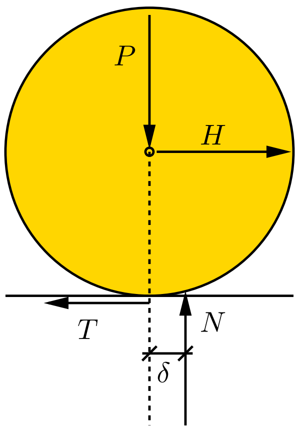
La *rueda motriz* tiene, además de una carga vertical P sobre su eje, un par motor aplicado M que intenta provocar el movimiento de rodadura. La *resistencia a la rodadura* es un momento contrario a la tendencia a la misma, que puede interpretarse como un adelantamiento δ de la reacción $N = P$ que se origina físicamente mediante una deformación del área de contacto finita, no puntual. Las ecuaciones de equilibrio arrojan:



$$P = N;$$
$$T = 0;$$
$$M = N\delta.$$

Por tanto, mientras la rueda está en equilibrio, la reacción tangencial debida al rozamiento no se moviliza. La resistencia a la rodadura queda limitada por su valor máximo $\delta \leq \delta_{\text{max}}$. Al aumentar el momento aplicado M, el equilibrio se pierde y la rueda comienza a rodar cuando $M = N\delta_{\text{max}}$. (A partir de este momento se produce una aceleración y consiguientemente un esfuerzo tangencial de rozamiento, cuyo valor sería $T = R\ddot{\theta} \leq N\mu$.)

En la *rueda remolcada* no se aplica un par motor, sino un esfuerzo H en la dirección de la marcha. Las ecuaciones de equilibrio son



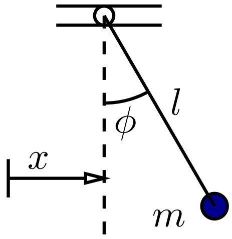
$$P = N;$$
$$T = H;$$
$$HR = N\delta.$$

Las resistencias pasivas de rozamiento y rodadura quedan limitadas por las desigualdades

$$H \leq N\mu; \quad HR \leq N\delta.$$

Al aumentar H, el equilibrio se romperá bien por deslizamiento, bien por rodadura, dependiendo cuál de las dos resistencias anteriores se agote antes: si $\mu < \delta/R$ la rueda comienza a deslizar, y si por el contrario $\mu \geq \delta/R$ la rueda comienza a rodar.

Explicar el concepto de coordenadas cíclicas en a) formulación lagrangiana; b) formulación hamiltoniana. *Discutir* las diferencias entre ambos tratamientos para las coordenadas cíclicas. *Aplicar* al caso de la figura (péndulo simple con base móvil según la horizontal), escribiendo las funciones Lagrangiana, Hamiltoniana, y las ecuaciones que resultan en cada caso, teniendo en cuenta las posibles coordenadas cíclicas. (5 ptos.)



Sea un sistema conservativo con coordenadas $q_i,\ i=\{1,\dots n\}$ y Lagrangiana $L(q_i,\dot q_i,t)$. Las ecuaciones de Lagrange pueden escribirse como $\dot p_i = \partial L/\partial q_j$, siendo $p_i = \partial L/\partial \dot q_i$ el momento generalizado correspondiente a la coordenada q_i. En el caso en que la Lagrangiana no dependa (explícitamente) de una coordenada q_j, ésta se denomina *coordenada cíclica*, conservándose el momento generalizado correspondiente:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \quad\Rightarrow\quad p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}=\phi(q_i,\dot q_i,t)=C_j\ (\text{cte.})$$

La ecuación anterior constituye una integral primera, función de las variables básicas lagrangianas $(q_i,\dot q_i)$ que se mantiene constante, pero no elimina por sí misma por completo la necesidad de seguir considerando $\dot q_j$, que en general no es constante.

La Hamiltoniana se obtiene como $H = p_i\dot q_i - L$, y expresandola como función de (p_i, q_i, t), para lo cual deben eliminarse las velocidades generalizadas $\dot q_i$ en favor de los momentos p_i. Las $2n$ ecuaciones (canónicas) de Hamilton son $\dot q_i = \partial H/\partial p_i;\ \dot p_i = -\partial H/\partial q_i = \partial L/\partial q_i$. Por tanto, la existencia de una coordenada cíclica conduce a

$$\frac{\partial H}{\partial q_j}=-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \quad\Rightarrow\quad p_j=C_j\ (\text{cte.})$$

Teniendo en cuenta que las variables básicas Hamiltonianas son (q_i,p_i), la existencia de una coordenada cíclica equivale a que la coordenada q_j no está presente en la Hamiltoniana, y que el momento correspondiente es constante ($p_j = C_j$), por lo cual dicha coordenada puede ser *ignorada*, no jugando ningún papel en las $2(n-1)$ ecuaciones restantes.

El ejemplo propuesto se define con las coordenadas (libres) (x,ϕ). La Lagrangiana del sistema es

$$L=\frac{1}{2}m(\dot x^2+l^2\dot\phi^2+2l\dot\phi\dot x\cos\phi)+mgl\cos\phi,$$

y los momentos generalizados

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot x}=m\dot x+ml\dot\phi\cos\phi;\qquad p_\phi=\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}=ml^2\dot\phi+ml\dot x\cos\phi.$$

La coordenada x es cíclica, por lo que la formulación Lagrangiana arroja la integral primera

$$p_x=m\dot x+ml\dot\phi\cos\phi=C_x\ (\text{cte.})$$

La Hamiltoniana, expresada como función de coordenadas y momentos, es

$$H=p_x\dot x+p_\phi\dot\phi-L=\frac{1}{2}(p_x\dot x+p_\phi\dot\phi)+V=\frac{1}{2}\frac{p_x^2}{m\,\mathrm{sen}^2\phi}+\frac{1}{2}\frac{p_\phi^2}{ml^2\,\mathrm{sen}^2\phi}-\frac{\cos\phi\,p_xp_\phi}{ml\,\mathrm{sen}^2\phi}-mgl\cos\phi$$

Comprobamos que la coordenada x no aparece en la Hamiltoniana ($\partial H/\partial x = 0$), por lo que el momento correspondiente es constante: $p_x = C_x$ (cte.). Basta con las otras dos ecuaciones de Hamilton para definir la dinámica:

$$\dot\phi=\frac{\partial H}{\partial p_\phi}=\frac{1}{ml^2\,\mathrm{sen}^2\phi}(p_\phi-lC_x\cos\phi)$$

$$\dot p_\phi=-\frac{\partial H}{\partial\phi}=\frac{\cos\phi}{ml^2\,\mathrm{sen}^3\phi}(l^2C_x^2+p_\phi^2)-\frac{1+\cos^2\phi}{ml\,\mathrm{sen}^3\phi}C_xp_\phi-mgl\,\mathrm{sen}\,\phi.$$