Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

# Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (9 de septiembre de 2002)

*Apellidos* *Nombre* *N.º* *Grupo*

*Ejercicio 2.º* (puntuación: 10/60) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos partiendo de las ecuaciones, mientras que si se pide *deducir* es necesario justificar todos los resultados. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

---

*Expresar* los teoremas generales de la dinámica referidos al balance del momento cinético y de la energía cinética, para un sistema formado por partículas $\{m_i, i = 1, \dots N\}$. *Justificar* en ambos teoremas si es necesario o no tener en cuenta las fuerzas interiores. *Razonar* respecto de qué puntos debe tomarse momentos para el balance del momento cinético. (5 ptos.)

Sea $O$ un punto fijo y $\boldsymbol{r}_i$ los vectores posición de cada partícula, se define el momento cinético como: $\boldsymbol{H}_O = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{r}_i \wedge m_i \boldsymbol{v}_i$, la resultante de fuerzas como: $\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^N (\boldsymbol{F}_i^{\text{ext}} + \boldsymbol{F}_i^{\text{int}}) = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}}$ y el momento de las fuerzas como: $\boldsymbol{M}_O = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}}$. Bajo la hipótesis usual de fuerzas internas centrales, la resultante de éstas y de sus momentos momentos se anula, ya que para cada pareja de fuerzas centrales el momento es nulo. El principio (teorema) del momento cinético expresa:

$$\boxed{\boldsymbol{M}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{H}_O.} \tag{1}$$

Si se toman momentos respecto de otro punto $Q$, definiendo $\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_Q$, resulta $\boldsymbol{H}_Q = \sum_i \boldsymbol{r}'_i \wedge m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge m_i \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{r}_Q \wedge \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{H}_O - \boldsymbol{r}_Q \wedge M \boldsymbol{v}_G$; derivando esta expresión,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{H}_Q &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{H}_O - \boldsymbol{r}_Q \wedge m \boldsymbol{a}_G - \boldsymbol{v}_Q \wedge M \boldsymbol{v}_G \\ &= \boldsymbol{M}_O - \boldsymbol{r}_Q \wedge \boldsymbol{F} - \boldsymbol{v}_Q \wedge M \boldsymbol{v}_G \\ &= \boldsymbol{M}_Q - \boldsymbol{v}_Q \wedge M \boldsymbol{v}_G, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $M\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{F}$ y que $\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{O}} - \boldsymbol{r}_Q \wedge \boldsymbol{F}$. Vemos pues que para obtener una igualdad similar a (1) debe anularse el segundo término ($-\boldsymbol{v}_Q \wedge M \boldsymbol{v}_G$), lo cual se cumple si $Q$ es un punto fijo ($\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{0}$) o bien si coincide con el centro de masa ($\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{v}_G$). Por tanto, la regla general es que para aplicar la expresión del teorema del momento cinético (1) *sólo se pueden tomar momentos respecto de un punto fijo o respecto del centro de masas.*

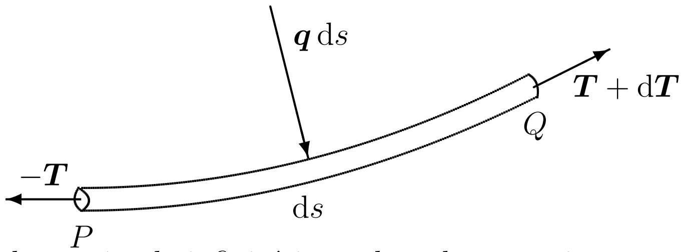
Por otra parte, se define energía cinética conjunta: $T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$, y el trabajo elemental de las fuerzas: $\delta W = \sum_{i=1}^N (\boldsymbol{F}_i^{\text{ext}} + \boldsymbol{F}_i^{\text{int}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \delta W^{\text{ext}} + \delta W^{\text{int}}$. El teorema de la energía cinética expresa:

$$\boxed{\mathrm{d}T = \delta W = \delta W^{\text{ext}} + \delta W^{\text{int}}.} \tag{2}$$

Al contrario que para el momento cinético, en un caso general de un sistema deformable el término $\delta W^{\text{int}}$ no se anula. Como ejemplo basta pensar en un resorte, cuyas fuerzas internas a pesar de ser centrales y alineadas (con resultante y momento nulos por tanto) desarrollan un trabajo al estirarse.

Sea un cable inextensible y perfectamente flexible, homogéneo, sometido a su propio peso. *Expresar* la ecuación (diferencial) del equilibrio. *Obtener*, justificando todos los pasos, la curva que forma el cable en equilibrio, a partir de la ecuación anterior. *Aplicación:* cable de peso propio 0,1 kN/m, anclado en dos puntos a la misma altura distantes 100 m, sabiéndose que la reacción horizontal en los anclajes vale 10 kN. *Calcular* la flecha máxima del cable. (5 ptos.)

Sea un elemento infinitesimal de cable $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \overrightarrow{PQ}$, de longitud $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$, sometido a su propio peso $\boldsymbol{q}\mathrm{d}s$. Las fuerzas internas del hilo resultan en una tensión $-\boldsymbol{T}$ en la cara dorsal en $P$ y $\boldsymbol{T}+\mathrm{d}\boldsymbol{T}$ en la cara frontal en $Q$.




Estableciendo equlibrio de momentos y fuerzas y despreciando infinitésimos de orden superior:

$$\boldsymbol{T}\wedge d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}; \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{0}. \tag{3}$$

La primera de las anteriores se traduce en que la tensión es necesariamente tangente al cable, y la segunda puede considerarse propiamente como ecuación (vectorial) de equilibrio del mismo.

Si el cable es homogéneo y sometido a su propio peso, valdrá $\boldsymbol{q} = -q\,\boldsymbol{k}$, siendo $\boldsymbol{k}$ el versor vertical ascendente. Una primera consecuencia de (3) en este caso es que la curva de equilibrio estará en un plano vertical, que tomaremos definido por coordenadas $x$ (horizontal) y $z$ (vertical). La expresión en componentes de la tensión, en función del vector unitario tangente, es $\boldsymbol{T} = T\,\boldsymbol{t} = T\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}\right)$. Desarrollando las componentes de $(3)_2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = 0; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) = q. \tag{4}$$

De $(4)_1$ se deduce que la tensión horizontal es constante: $T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T_x = T_0$ (cte.). Teniendo esto en cuenta, podemos poner $T_z = T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = T_0\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = T_0\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, y desarrollando $(4)_2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T_0\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) = T_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T_0\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{\sqrt{1+(\mathrm{d}z/\mathrm{d}x)^2}} = q.$$

Llamando $a \overset{\text{def}}{=} T_0/q$, $z' \overset{\text{def}}{=} \mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ la ecuación anterior la podemos escribir como $a\dfrac{1}{\sqrt{1+z'^2}}\dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x} = 1$, y mediante el cambio $z' = \operatorname{senh} u$ se integra fácilmente:

$$a\,\operatorname{argsenh} z' = x \quad\Rightarrow\quad z' = \operatorname{senh}\frac{x}{a}.$$

(al tomarse la constante de integración nula esto equivale a que $z' = 0$ para $x = 0$.) Integrando de nuevo la ecuación anterior resulta

$$\boxed{z = a\cosh\frac{x}{a} \quad \text{(catenaria).}}$$

Aquí nuevamente se ha tomado constante de integración nula, que obliga a $z = a$ para $x = 0$. Por tanto, el origen de coordenadas $xz$ se sitúa en un punto una distancia $a$ por debajo del vértice de la catenaria ($z' = 0$).

*Aplicación:* $a = T_0/q = 10/0,1 = 100\,\mathrm{m}$. La flecha máxima se producirá en el medio ($x = 100/2 = 50\,\mathrm{m}$), y se puede obtener como la diferencia de ordenadas entre un extremo y el vértice:

$$f = 100\cosh\frac{50}{100} - 100 = 12{,}76\,\mathrm{m}.$$