Mecánica

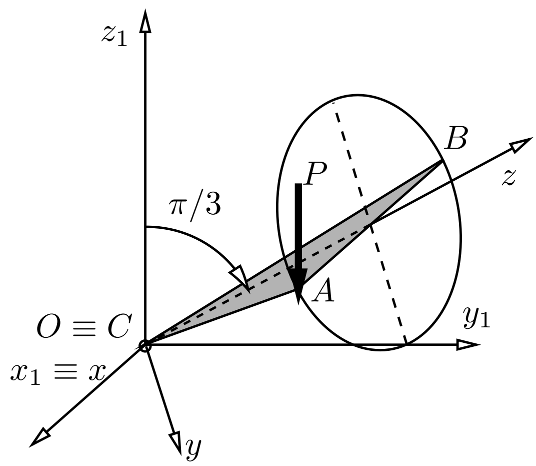
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (9 de septiembre de 2002)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 60 min.

Un sólido está constituido por una placa en forma de triángulo equilátero homogéneo ABC de lado $2a$ y masa m unida a un aro sin masa de radio a. El plano de la placa y el aro son perpendiculares y el lado AB es un diámetro de éste, formando un único sólido rígido.

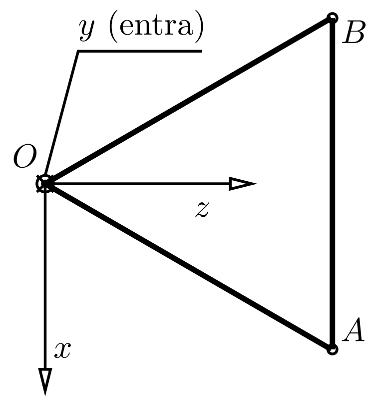
El sólido así definido se coloca con el vértice C obligado a permanecer en el origen de coordenadas O mediante una articulación esférica. Asímismo el aro está obligado a rodar sin deslizar por el plano horizontal Ox_1y_1, existiendo fuerzas de ligadura solamente según la tangente al aro y según la normal al plano, pero no según la recta que une el punto de contacto con O. En la posición inicial el diámetro AB está horizontal y el sólido en reposo. En este estado se le aplica una percusión vertical descendente de valor P en el punto A.



Se pide

1. Tensor de inercia del sólido empleando para las coordenadas el triedro $Oxyz$ ligado al sólido.
2. Obtener la velocidad angular del sólido y su energía cinética después de la percusión.
3. Percusión reactiva que aparece en el contacto entre el aro y el plano Ox_1y_1.

1.— En la figura adjunta se muestra el plano del triángulo OAB en verdadera magnitud, con indicación de los ejes del triedro $Oxyz$. Partiendo del dato (fácilmente deducible) de que el momento de inercia de un triángulo de altura h respecto de un eje que pasa por un lado del mismo es $I = (1/6)Mh^2$, se obtiene $(I_O)_{zz} = 2(1/6)(m/2)a^2 = (1/6)ma^2$, así como $(I_O)_{xx} = (1/2)m(a\sqrt{3})^2 = (3/2)ma^2$. Por último, según el eje perpendicular a la placa y el momento de inercia es suma de los otros dos, es decir:



$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}ma^2 \end{pmatrix}$$

2.— Puesto que el aro rueda sin deslizar y el punto C es fijo, el movimiento es el de un cono de semiángulo 30°, es decir una rotación instantánea alrededor de la generatriz de contacto, eje Oy_1. Para resolver la velocidad angular lo más sencillo es tomar momentos respecto de este eje. Las impulsiones reactivas no influyen pues pasan por el eje, sólo la impulsión activa P da momentos respecto del mismo:

$$
\begin{aligned}
(M_O)_{y_1} = (\boldsymbol{M}_O) \cdot \boldsymbol{j}_1 &= \left[\left(a\,\boldsymbol{i}_1 + \frac{3}{2}a\boldsymbol{j}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a\boldsymbol{k}_1 \right) \wedge (-P\,\boldsymbol{k}_1) \right] \cdot \boldsymbol{j}_1 \\
&= \left(-\frac{3}{2}Pa\,\boldsymbol{i}_1 + Pa\,\boldsymbol{j}_1 \right) \cdot \boldsymbol{j}_1 = Pa.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, la componente del momento cinético es

$$
(H_O)_{y_1} = \boldsymbol{j}_1 \cdot (\boldsymbol{I}_O \cdot \Omega \boldsymbol{j}_1) = [\boldsymbol{j}_1 \cdot (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{j}_1)]\,\Omega = (I_O)_{y_1y_1}\Omega; \qquad (I_O)_{y_1y_1} = \boldsymbol{j}_1 \cdot (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{j}_1) = \frac{13}{24}ma^2.
$$

Igualando ambas expresiones resulta

$$
\boxed{\Omega = \frac{24}{13}\frac{P}{ma}.} \tag{1}
$$

La energía cinética vale por tanto

$$
\boxed{T = \frac{1}{2}(I_O)_{y_1y_1}\Omega^2 = \frac{12}{13}\frac{P^2}{m}.} \tag{2}
$$

3.— En el punto de contacto del aro con el plano, que llamaremos D, se producen percusiones reactivas $(H\,\boldsymbol{i}_1 + V\,\boldsymbol{k}_1)$. El momento de las percusiones (activas y reactivas) es

$$
\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r}_{OA} \wedge \boldsymbol{P} + \boldsymbol{r}_{OD} \wedge (\boldsymbol{V} + \boldsymbol{H}) = -\frac{3}{2}Pa\,\boldsymbol{i}_1 + Pa\,\boldsymbol{j}_1 - 2Ha\,\boldsymbol{k}_1 + 2Va\,\boldsymbol{i}_1. \tag{3}
$$

Por otra parte, el momento cinético es

$$
\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \Omega \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k} \right) = ma^2\Omega \left(\frac{5}{6}\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{3}}{12}\boldsymbol{k} \right) \tag{4}
$$

Teniendo en cuenta las relaciones entre los vectores de ambos triedros, $\boldsymbol{j} = \frac{1}{2}\boldsymbol{j}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_1$, podemos transformar la expresión (4):

$$
\boldsymbol{H}_O = ma^2 \left(\frac{13}{24}\boldsymbol{j}_1 - \frac{3\sqrt{3}}{8}\boldsymbol{k}_1 \right) \Omega. \tag{5}
$$

Igualando componentes entre las expresiones (3) y (5) y usando (1) se obtienen las reacciones buscadas:

$$
\boxed{V = \frac{3}{4}P;} \qquad \boxed{H = \frac{9\sqrt{3}}{26}P.} \tag{6}
$$

Las reacciones en O, $\boldsymbol{R}_O \equiv (R_{x_1}, R_{y_1}, R_{z_1},)$ se obtienen mediante el balance de la resultante de las impulsiones:

$$R_{x_1} + H = mv_G = m\Omega\frac{a}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{x_1} = \frac{7\sqrt{3}}{26}P;}$$

$$\boxed{R_{y_1} = 0;}$$

$$R_{z_1} + V - P = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{z_1} = \frac{1}{4}P.}$$

$\star$

Aunque el enunciado no lo pide, es interesante estudiar el movimiento después del choque, cuya cinemática será una rodadura del sólido sobre el plano como si fuera un cono. La energía cinética se conserva, puesto que no hay fuerzas disipativas y el potencial es constante, pero la velocidad angular varía a lo largo del movimiento, no sólo en dirección (siempre según la generatriz de contacto) sino también en módulo.

En un instante genérico en que la rotación propia del cono sea φ, el triedro del cuerpo habrá girado un ángulo igual alrededor del eje Oz. El versor que define la generatriz de contacto es

$$\boldsymbol{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k} + \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}).$$

Por tanto, el momento de inercia respecto de este eje es

$$\begin{aligned} I_u &= \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{u}) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{2} & \frac{\cos\varphi}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}ma^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{2} \\ \frac{\cos\varphi}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} = \frac{ma^2}{24}(9\operatorname{sen}^2\varphi + 10\cos^2\varphi + 3). \end{aligned}$$

Puesto que la energía cinética se conserva, empleando (2):

$$\frac{ma^2}{48}(9\operatorname{sen}^2\varphi + 10\cos^2\varphi + 3)\Omega^2 = \frac{12}{13}\frac{P^2}{m} \tag{7}$$

De esta ecuación podemos obtener Ω en función de la rotación propia φ. Por otra parte, por consideraciones cinemáticas elementales, podemos interpretar la rotación del sólido como compuesta de una precesión ψ alrededor del eje fijo Oz_1 y una rotación propia φ alrededor del eje del cono Oz. La condición de rodadura sin deslizamiento obliga a $\varphi = -2\psi$, por lo que $\Omega^2 = (\dot\varphi\,\boldsymbol{k} + \dot\psi\,\boldsymbol{k}_1)^2 = \dot\varphi^2 + (-\dot\varphi/2)^2 + 2\dot\varphi(-\dot\varphi/2)(1/2) = \frac{3}{4}\dot\varphi^2$. Por tanto, sustituyendo en (7) obtenemos una expresión en función de φ sólo:

$$\frac{ma^2}{64}(9\operatorname{sen}^2\varphi + 10\cos^2\varphi + 3)\dot\varphi^2 = \frac{12}{13}\frac{P^2}{m}.$$

Esta expresión reduce el movimiento a una cuadratura, que integrada, proporcionaría la posición y velocidad en cada instante.