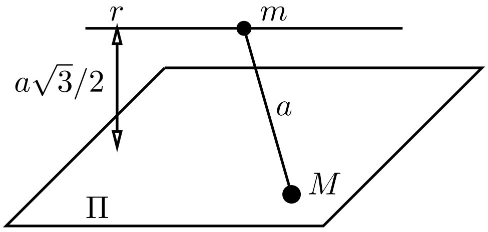
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (9 de septiembre de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 45 min.

Un sistema formado por dos masas puntuales de valores m y M unidas por una varilla rígida y sin masa se mueve de manera que M se apoya sobre un plano horizontal liso Π, mientras que m desliza libremente sobre una recta horizontal r, situada a una altura $a\sqrt{3}/2$ sobre el plano. Se pide:



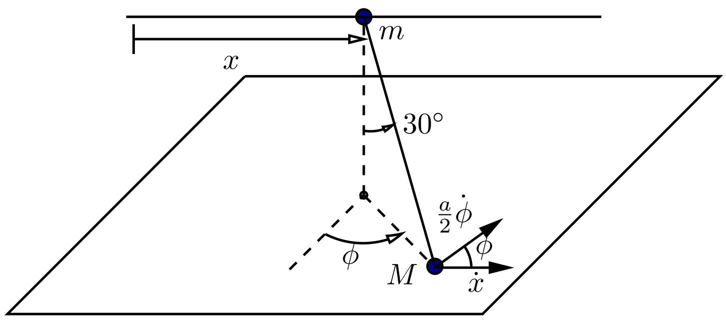
1. Establecer los grados de libertad del sistema y las ecuaciones diferenciales del movimiento.

2. Obtener las integrales primeras que pudieran existir, en función de condiciones iniciales genéricas.

3. Expresión de la reacción del plano sobre M en un instante genérico.

⋆

1.— El sistema se define mediante dos grados de libertad, la traslación x y el ángulo de giro ϕ alrededor del eje vertical por m. El potencial gravitatorio no influye en el movimiento al ser la altura de las masas constante, por lo que la Lagrangiana coincide con la energía cinética:



$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\left[\dot{x}^2 + \left(\frac{a}{2}\dot{\phi}\right)^2 + 2\frac{a}{2}\dot{\phi}\dot{x}\cos\phi\right]$$
$$= \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{8}Ma^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}Ma\dot{\phi}\dot{x}\cos\phi \qquad (1)$$

La ecuación de Lagrange para ϕ resulta:

$$\frac{1}{4}Ma^2\ddot{\phi} + \frac{1}{2}Ma\ddot{x}\cos\phi = 0. \qquad (2)$$

Para x vemos que $\partial L/\partial x = 0$, por lo que es una coordenada cíclica:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m+M)\dot{x} + \frac{1}{2}Ma\dot{\phi}\cos\phi \quad \text{(cte.)} \qquad (3)$$

Las dos ecuaciones diferenciales (2) y (3) definen el movimiento. Podemos por otra parte eliminar la coordenada cíclica de la ecuación (2). Derivando (3):

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2}\frac{Ma}{m+M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\phi}\cos\phi);$$

y sustituyendo en (2):

$$\frac{1}{4}Ma^2\ddot{\phi} - \frac{1}{4}\frac{M^2a^2}{m+M}\cos\phi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\phi}\cos\phi) =$$
$$= \frac{1}{4}Ma^2\ddot{\phi} - \frac{1}{4}\frac{M^2a^2}{m+M}\cos\phi\left(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\operatorname{sen}\phi\right) = 0. \quad (4)$$

Esta ecuación tiene la ventaja de que sólo es función de ϕ.

2.— Además de la integral primera (3), se conserva la energía del sistema, al no existir fuerzas disipativas:

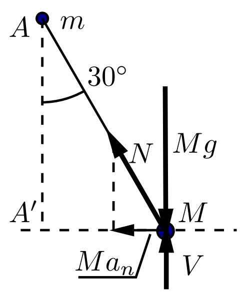
$$E = T = L \quad \text{(cte.)} \quad (5)$$

(Al coincidir con la Lagrangiana, la expresión es la misma de (1).) Por tanto, las dos integrales primeras vienen dadas por las ecuaciones (3) y (5). Aquí también podemos eliminar la coordenada cíclica de (5), mediante (3), resultando una expresión función tan sólo de ϕ (y de la constante p_x):

$$E = \frac{1}{8}Ma^2\dot{\phi}^2\frac{m+M\operatorname{sen}^2\phi}{m+M} + \frac{1}{2}\frac{p_x^2}{m+M} \qquad \text{(cte.)} \quad (6)$$

Es posible comprobar por otra parte que se podría integrar directamente la ecuación (4). En efecto, multiplicando la primera expresión de dicha ecuación por $\dot{\phi}$ se obtiene una expresión de integración inmediata, llegándose a la misma ecuación que la de constancia de la energía (6).

3.— Para obtener las reacciones aplicamos la ecuación fundamental de la dinámica a la partícula M. El diagrama de fuerzas y aceleraciones se muestra en la figura adjunta. Las reacciones sobre esta partícula son la tensión de la varilla, N (dirigida según la misma) y la reacción (vertical) del plano, V, mientras que la única fuerza aplicada es su peso Mg. La aceleración de la partícula es horizontal, y necesariamente debe estar dirigida según la proyección MA' de la varilla sobre el plano, ya que no hay ninguna fuerza horizontal además de la proyección de N. Calculamos primero por tanto la aceleración de M:



$$\boldsymbol{a} = \ddot{x}\,\boldsymbol{i} + \ddot{\phi}\frac{a}{2}\boldsymbol{t} + \dot{\phi}^2\frac{a}{2}\boldsymbol{n},$$

siendo $\boldsymbol{i}$ el versor según la dirección x y $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t})$ los versores horizontales según la proyección de la varilla MA' y su perpendicular respectivamente. Considerando $\boldsymbol{i} = -\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{n} + \cos\phi\,\boldsymbol{t}$ y la ecuación (2),

$$\boldsymbol{a} = -\frac{a}{2}\frac{\ddot{\phi}}{\cos\phi}(-\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{n} + \cos\phi\,\boldsymbol{t}) + \ddot{\phi}\frac{a}{2}\boldsymbol{t} + \dot{\phi}^2\frac{a}{2}\boldsymbol{n} = \frac{a}{2}(\ddot{\phi}\operatorname{tg}\phi + \dot{\phi}^2)\boldsymbol{n}.$$

(Comprobamos que efectivamente se anula la componente a_t de la aceleración.) Ya podemos escribir la ecuación dinámica en dirección de $\boldsymbol{n}$,

$$\frac{1}{2}N = M\frac{a}{2}(\ddot{\phi}\operatorname{tg}\phi + \dot{\phi}^2) \quad \Rightarrow \quad N = Ma(\ddot{\phi}\operatorname{tg}\phi + \dot{\phi}^2). \quad (7)$$

Podemos *mejorar* esta expresión eliminando $\ddot{\phi}$, empleando para ello la ecuación (4):

$$\ddot{\phi} = -\frac{M}{m + M\,\text{sen}^2\phi}\dot{\phi}^2\,\text{sen}\,\phi\cos\phi \quad \rightarrow \quad N = Ma\dot{\phi}^2\frac{m}{m + M\,\text{sen}^2\phi}. \tag{8}$$

Conocida N, podemos obtener V a partir del equilibrio vertical de M:

$$V + N\frac{\sqrt{3}}{2} - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = Mg - Ma\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\phi}^2\frac{m}{m + M\,\text{sen}^2\phi}.} \tag{9}$$

Por último, podríamos utilizar la integral primera (6) para dejar esta reacción expresada directamente en función de ϕ tan sólo. Para ello consideremos por ejemplo unas condiciones iniciales del movimiento $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = \omega_0$ (las condiciones iniciales en la coordenada cíclica x no intervienen). De esta forma, la ecuación (6) arroja

$$\dot{\phi}^2 = \omega_0^2\frac{m}{m + M\,\text{sen}^2\phi},$$

y sustituyendo en (8) y (9) se obtiene:

$$N = Ma\frac{(m\omega_0)^2}{(m + M\,\text{sen}\,\phi)^2}; \quad V = Mg - Ma\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(m\omega_0)^2}{(m + M\,\text{sen}\,\phi)^2}.$$