Mecánica

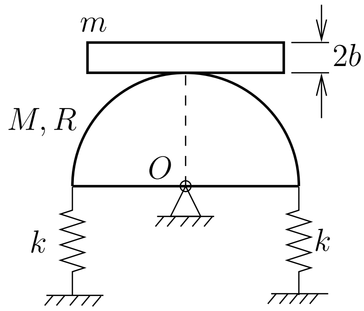
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (9 de septiembre de 2002)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 50 min.

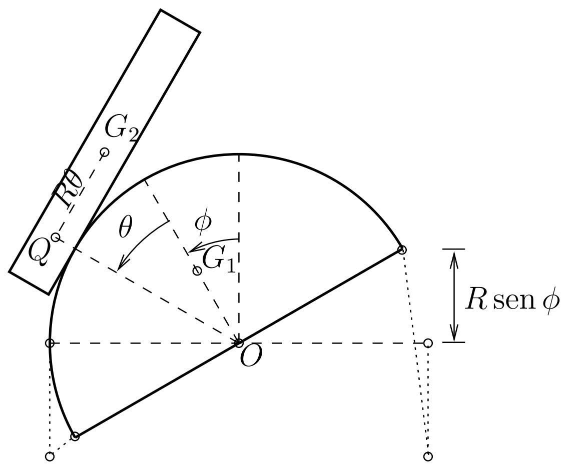
El sistema plano de la figura representa un semidisco homogéneo de masa M y radio R, que puede girar libremente alrededor de su centro O. Sobre el semidisco se apoya simétricamente una barra de masa m y espesor $2b$, de forma que puede rodar sin deslizar sobre el mismo. Además existen dos resortes verticales de constante k y elongación natural nula que rigidizan el sistema.

Estudiar la estabilidad de la placa en esa posición de equilibrio y establecer la relación entre k, las masas y otros parámetros geométricos para que el equilibrio sea estable.



El movimiento del sistema se puede describir con dos grados de libertad, el ángulo ϕ girado por el semidisco y el ángulo θ de rodadura de la barra relativo al semidisco, indicados en la figura. Teniendo en cuenta que $\overline{OG_1} = 4R/(3\pi)$ y que la distancia de rodadura de la barra sobre el disco es $\overline{QG_2} = R\theta$, y que el recorrido vertical de los resortes es $R \operatorname{sen} \phi$, el potencial del sistema se expresa como

$$V = mg\left[(R+b)\cos(\theta+\phi) + R\theta \operatorname{sen}(\theta+\phi)\right] + Mg\left(\frac{4R}{3\pi}\cos\phi\right) + 2\frac{1}{2}k(R\operatorname{sen}\phi)^2 \quad (1)$$



Las derivadas primeras del potencial son

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mg\left[-(R+b)\operatorname{sen}(\theta+\phi) + R\operatorname{sen}(\theta+\phi) + R\theta\cos(\theta+\phi)\right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = mg\left[-(R+b)\operatorname{sen}(\theta+\phi) + R\theta\cos(\theta+\phi)\right] - Mg\frac{4R}{3\pi}\operatorname{sen}\phi + 2kR^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi, \quad (3)$$

comprobándose fácilmente que la posición dada $(\theta, \phi) = (0, 0)$ es de equilibrio al anularse ambas derivadas. Derivando de nuevo,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = mg\left[-(R+b)\cos(\theta+\phi) + 2R\cos(\theta+\phi) - R\theta\operatorname{sen}(\theta+\phi)\right] \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = mg\left[-(R+b)\cos(\theta+\phi) - R\theta\operatorname{sen}(\theta+\phi)\right] - Mg\frac{4R}{3\pi}\cos\phi + 2kR^2\cos 2\phi \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \phi} = mg\left[-(R+b)\cos(\theta+\phi) + R\cos(\theta+\phi) - R\theta\operatorname{sen}(\theta+\phi)\right] \quad (6)$$

Particularizando en la posición de equilibrio construimos la matriz Hessiana:

$$[\mathbf{H}]_{\theta=0,\phi=0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \phi} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \theta} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg(R-b) & -mgb \\ -mgb & 2kR^2 - Mg\dfrac{4R}{3\pi} - mg(R+b) \end{pmatrix} \tag{7}$$

Para que el equilibrio sea estable la matriz Hessiana debe ser definida positiva, correspondiendo a un mínimo del potencial. La condición para ello es que los menores principales de dicha matriz sean positivos:

$$mg(R-b) > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R > b;} \tag{8}$$

$$\left[2kR^2 - Mg\frac{4R}{3\pi} - mg(R+b)\right] mg(R-b) - (mgb)^2 > 0$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{k > \frac{2M}{3\pi}\frac{g}{R} + \frac{m}{2}\frac{g}{R-b}.} \tag{9}$$

Las condiciones pedidas son por tanto (8) y (9).