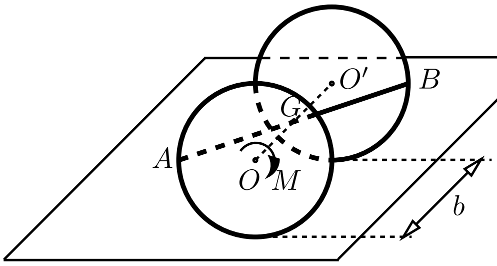
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (9 de septiembre de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

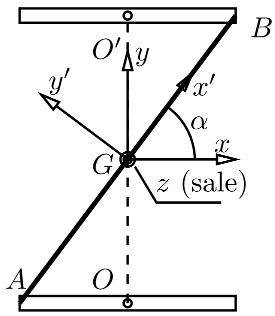
Ejercicio 6.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 60 min.

El sólido rígido de la figura está formado por dos discos y una varilla. Los discos son iguales con masa m_1 y radio R, estando contenidos en planos verticales paralelos separados una distancia b, y perpendiculares a la recta OO' que une sus centros. La varilla, de masa m_2, está soldada por sus extremos a sendos puntos A y B del borde de los discos de tal manera que su centro coincide con el centro de masas G del sólido rígido conjunto. Este sólido se mueve de manera que los discos ruedan sin deslizar en todo momento sobre un plano horizontal fijo. En el instante inicial, en que el sólido está en reposo con la varilla horizontal, se aplica un momento M según OO' (ver figura). Se pide:



1. Tensor central de inercia, definiendo claramente los ejes en que se expresan sus componentes.
2. Valor de la aceleración de G en el instante inicial.
3. Expresión de las reacciones en los puntos de apoyo de cada disco sobre el plano horizontal, en dicho instante inicial.
4. Determinar el valor del momento M que hace que el sólido se despegue del plano en el instante inicial, indicando en cuál de los discos se produce el despegue.

1.— Tomaremos el triedro $Gxyz$ para expresar las componentes de tensor: Gy según GO', Gz vertical ascendente y Gx formando triedro a derechas con los anteriores, es decir según el sentido del movimiento de G que produce el momento aplicado M. En la figura adjunta se muestra una vista en planta del sistema. Para obtener el tensor de inercia de la varilla partimos en primer lugar de las componentes en el triedro $Gx'y'z$, que valen



$$[\boldsymbol{I}_G]_2' = \frac{1}{12} m_2 \ell^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

siendo $\ell = \sqrt{b^2 + 4R^2}$ la longitud de la varilla.
Teniendo en cuenta que la matriz de rotación para pasar del triedro $Gx'y'z$ al $Gxyz$, corres-

pondiente a un giro de ángulo $(-\alpha)$ alrededor de Gz, es

$$\{\boldsymbol{x}\} = [\boldsymbol{R}]\{\boldsymbol{x}\}'; \qquad [\boldsymbol{R}] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = b/\ell$, $\cos\alpha = 2R/\ell$, el tensor de inercia de la varilla en coordenadas $Gxyz$ resulta

$$[\boldsymbol{I}_G]_2 = [\boldsymbol{R}][\boldsymbol{I}_G]_2'[\boldsymbol{R}]^{\mathrm{T}} = \frac{1}{12}m_2\ell^2 \begin{pmatrix} b^2/\ell^2 & -2Rb/\ell^2 & 0 \\ -2Rb/\ell^2 & 4R^2/\ell^2 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}m_2 \begin{pmatrix} b^2 & -2Rb & 0 \\ -2Rb & 4R^2 & 0 \\ 0 & & \ell^2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, el tensor de inercia de los dos discos en estos mismos ejes es

$$[\boldsymbol{I}_G]_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m_1(R^2+b^2) & 0 & 0 \\ 0 & m_1R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m_1(R^2+b^2) \end{pmatrix}$$

Por tanto, el tensor de inercia del conjunto en los ejes $Gxyz$ es

$$[\boldsymbol{I}_G] = [\boldsymbol{I}_G]_1 + [\boldsymbol{I}_G]_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}m_2b^2 + \frac{1}{2}m_1(R^2+b^2) & -\frac{1}{6}m_2Rb & 0 \\ -\frac{1}{6}m_2Rb & \frac{1}{3}m_2R^2 + m_1R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m_2\ell^2 + \frac{1}{2}m_1(R^2+b^2) \end{pmatrix}$$

2.— Las ecuaciones de la dinámica (balance de momento cinético respecto a G y balance de cantidad de movimiento) son

$$\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{I}_G\dot{\boldsymbol{\Omega}}_G + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{I}_G\dot{\boldsymbol{\Omega}}_G, \qquad \boldsymbol{F} = (2m_1+m_2)\boldsymbol{a}_G, \tag{1}$$

al ser en el instante inicial $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{0}$. Por otra parte, el sólido conjunto desde el punto de vista cinemático se mueve como un cilindro rodando sin deslizar, ya que la varilla (soldada) impide rotaciones relativas entre ambos discos, por lo que $\boldsymbol{a}_G = a_G\,\boldsymbol{i}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = (a_G/R)\,\boldsymbol{j}$. Denominando las reacciones en el contacto de cada disco con el plano (H,V) y (H',V') respectivamente, las ecuaciones (1) resultan:

$$\left\{\begin{matrix} (V'-V)\dfrac{b}{2} \\ M-(H+H')R \\ (H-H')\dfrac{b}{2} \end{matrix}\right\} = [\boldsymbol{I}_G]\left\{\begin{matrix} 0 \\ \dfrac{a_G}{R} \\ 0 \end{matrix}\right\}; \qquad \left\{\begin{matrix} H+H' \\ 0 \\ V+V'-(2m_1+m_2)g \end{matrix}\right\} = (2m_1+m_2)\left\{\begin{matrix} a_G \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

Identificando componentes y eliminando, resulta:

$$\begin{aligned} H = H' &= \frac{1}{2}(2m_1+m_2)a_G = \frac{M}{2R}\frac{2m_1+m_2}{3m_1+4m_2/3}; \\ a_G &= \frac{M/R}{3m_1+4m_2/3}; \\ V &= \frac{1}{2}(2m_1+m_2)g + \frac{m_2/2}{9m_1+4m_2}\frac{M}{R}; \\ V' &= \frac{1}{2}(2m_1+m_2)g - \frac{m_2/2}{9m_1+4m_2}\frac{M}{R}. \end{aligned}$$

Podemos comprobar la asimetría entre las reacciones verticales en los dos discos, que no son iguales. La segunda (V') llegará a anularse cuando

$$M = gR\frac{(9m_1 + 4m_2)(2m_1 + m_2)}{m_2},$$

momento en que el disco con centro en O' se elevaría del plano.