Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN PARCIAL (23 de noviembre de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 5/25) Tiempo: 30 min.

Responder a la siguiente cuestión teórico-práctica *dentro del espacio provisto en la hoja*. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Sea un oscilador armónico simple, con masa m, amortiguamiento viscoso de constante c y resorte de constante k, sometido a una fuerza exterior armónica de amplitud F y frecuencia (angular) Ω. Se pide:

1. *Escribir* la ecuación diferencial del movimiento.
2. *Razonar* cuál de las expresiones siguientes puede representar, en un caso general, el movimiento en régimen permanente:

   a) $x_p(t) = A \operatorname{sen} \Omega t$,

   b) $x_p(t) = A \operatorname{sen} \Omega t + B \cos \Omega t$,

   c) $x_p(t) = \mathrm{e}^{-\frac{c}{2m}t}(A \operatorname{sen} \Omega t + B \cos \Omega t)$.
3. *Calcular* las constantes en dicha expresión (A y, en su caso, B).

1.— Denominando x al grado de libertad del oscilador (elongación del resorte desde la posición de equilibrio) la ecuación diferencial es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \operatorname{sen} \Omega t.$$

2.— El régimen permanente debe coincidir con una solución particular de la ecuación. La opción *a)* no cumple la ecuación diferencial si $c \neq 0$. Tampoco la cumple la opción *c)* como se comprueba fácilmente. La opción *b)* sí cumple la ecuación, para determinados valores de las constantes A y B. Cabe observar que la expresión *b)* es equivalente a $C \operatorname{sen}(\Omega t + \varphi)$, con un cambio de constantes ($A = C \cos \varphi, B = C \operatorname{sen} \varphi$).

3.— Obligando a que la expresión *b)* cumpla la ecuación diferencial,

$$-m\Omega^2(A \operatorname{sen} \Omega t + B \cos \Omega t) + c\Omega(A \cos \Omega t - B \operatorname{sen} \Omega t) + k(A \operatorname{sen} \Omega t + B \cos \Omega t) = F \operatorname{sen} \Omega t,$$

e igualando los coeficientes de $\operatorname{sen} \Omega t$ y $\cos \Omega t$ se obtiene:

$$-m\Omega^2 A - c\Omega B + kA = F; \qquad -m\Omega^2 B + c\Omega A + kB = 0;$$

despejando los coeficientes A y B,

$$A = F\frac{k - m\Omega^2}{c^2\Omega^2 + (k - m\Omega^2)^2}; \qquad B = -F\frac{c\Omega}{c^2\Omega^2 + (k - m\Omega^2)^2}.$$