Mecánica

EXAMEN PARCIAL (21 de enero de 2003)

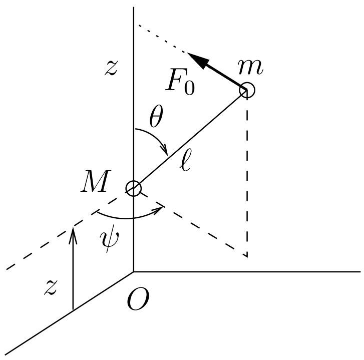
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/25) Tiempo: 60 min.

Un sistema formado por dos masas puntuales M y m pesadas, unidas por una varilla rígida sin masa de longitud ℓ, se mueve de forma que M está obligada a permanecer sobre el eje vertical fijo Oz, sin rozamiento, y m tiene el movimiento más general posible compatible con los enlaces descritos. Además sobre m actúa una fuerza horizontal constante F_0 de atracción hacia Oz. Se pide:

1. Expresión de la energía mecánica total del sistema en un instante genérico, razonando si se conserva o no.
2. Expresión del momento cinético del sistema respecto al eje Oz, en un instante genérico, razonando si se conserva o no.
3. Ecuaciones diferenciales suficientes para definir el movimiento.
4. Reacción del eje Oz sobre M en un instante genérico.
5. ¿Qué fuerza necesitaremos aplicar a M para conseguir un movimiento uniforme de la misma?

1.— El sistema tiene 3 grados de libertad, la cota z de M y los ángulos (θ, ψ) que definen la posición relativa de m. Primero debemos obtener la velocidad de cada una de las masas, que valen



$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_M &= \dot{z}\,\boldsymbol{k}; \\ \boldsymbol{v}_m &= \dot{z}\,\boldsymbol{k} + \ell\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\psi + \ell\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta \\ &= (\ell\dot{\theta} - \dot{z}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{u}_\theta + \ell\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\psi + \dot{z}\cos\theta\,\boldsymbol{u}_\ell. \end{aligned} \tag{1}$$

(En las expresiones anteriores se han empleado los versores ortonormales ($\boldsymbol{u}_\theta$, $\boldsymbol{u}_\psi$, $\boldsymbol{u}_\ell$) según las líneas coordenadas correspondientes.) La energía cinética vale pues

$$T = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 - 2\ell\dot{z}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \ell^2\dot{\psi}^2\operatorname{sen}^2\theta). \tag{2}$$

La energía potencial proviene del peso y de F_0 (constante y por tanto conservativa):

$$V = Mgz + mg(z + \ell\cos\theta) + F_0\ell\operatorname{sen}\theta, \tag{3}$$

por lo que la energía total se conserva y vale

$$E = \frac{1}{2}(M+m)\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 - 2\ell\dot{z}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \ell^2\dot{\psi}^2\operatorname{sen}^2\theta) + (M+m)gz + mg\ell\cos\theta + F_0\ell\operatorname{sen}\theta. \tag{4}$$

2.— El momento cinético respecto de O es

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{r}_M \wedge M\boldsymbol{v}_M + \boldsymbol{r}_m \wedge m\boldsymbol{v}_m = (z\,\boldsymbol{k} + \ell\,\boldsymbol{u}_r) \wedge m(\dot{z}\,\boldsymbol{k} + \ell\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{u}_\psi + \ell\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta).$$

Podríamos operar y proyectar el resultado según Oz. Sin embargo, es más sencillo tener en cuenta que la única componente que da momento respecto del eje Oz es la que lleva la dirección de $\boldsymbol{u}_\psi$, por lo que multiplicando por el brazo resulta

$$H_z = (\ell\,\mathrm{sen}\,\theta)\cdot m(\ell\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\psi}) = m\ell^2\dot{\psi}\,\mathrm{sen}^2\,\theta \quad (\text{cte.}) \tag{5}$$

Se conserva puesto que las fuerzas aplicadas no dan momento respecto de dicho eje.

3.— El sistema tiene 3 grados de libertad, por lo que a las ecuaciones (4) y (5) hay que agregarle una tercera. Tomaremos para ello la ecuación de la dinámica en dirección vertical. Calculando las aceleraciones z de las masas resulta

$$-(M+m)g = (M+m)\ddot{z} - m\ell(\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta). \tag{6}$$

4.— La reacción que transmite la varilla sin masa lleva la dirección de la propia varilla, que se comporta como un hilo tenso. Por tanto, la reacción de Oz sobre M, además de ser horizontal, deberá estar contenido en el plano vertical que contiene a la varilla. Podemos tomar por tanto unas coordenadas cilíndricas ($\rho = \ell\,\mathrm{sen}\,\theta, \psi, z$) para establecer la ecuación de la dinámica en la dirección de ρ, que nos dará la reacción:

$$R - F_0 = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\psi}^2) = m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\theta - \dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta). \tag{7}$$

Podríamos también obtener la ecuación dinámica en dirección de $\boldsymbol{u}_\psi$, para comprobar si efectivamente la reacción R_ψ en esta dirección es nula:

$$R_\psi = m(2\dot{\rho}\dot{\psi} + \rho\ddot{\psi}) = m\ell(2\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta + \ddot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta);$$

La comprobación buscada obtiene sin más que observar que derivando la constante (5) se obtiene

$$\ddot{\psi}\,\mathrm{sen}^2\,\theta + 2\dot{\theta}\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = 0,$$

expresión que es proporcional a la ecuación anterior, por lo que $R_\psi = 0$.

5.— Por último, para el movimiento pedido basta hacer $\ddot{z} = 0$, por lo que agregando una fuerza F_z a la ecuación (6) resulta:

$$F_z = (M+m)g - m\ell(\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta). \tag{8}$$