Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

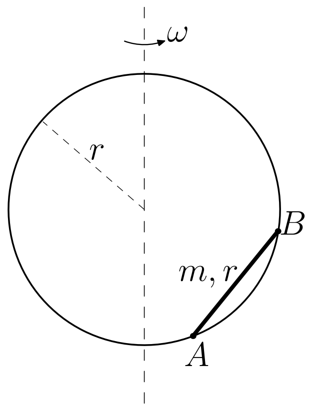
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (21 de enero de 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

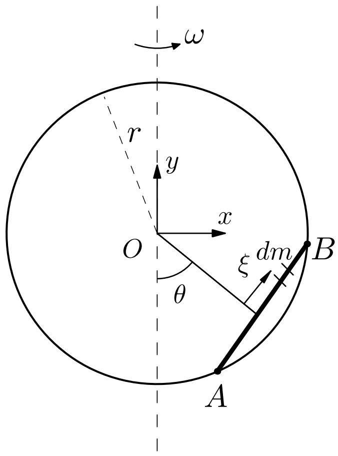
Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un aro de radio r gira alrededor de su diámetro vertical fijo, con velocidad angular ω constante. Una varilla pesada de masa m y longitud r se mueve de manera que sus extremos A y B permanecen en el aro con ligadura bilateral lisa. Se pide:



1. Encontrar las posibles posiciones de equilibrio relativo de la varilla respecto de un sistema de referencia que acompañe en su movimiento al aro, discutiendo su existencia en función de los valores de ω.

2. Analizar la estabilidad de dichas posiciones de equilibrio relativo en función de los valores de ω.



1.— Para analizar el equilibrio relativo de la varilla se considerará el sistema de referencia Oxy de la figura, que acompaña en su movimiento al aro. El equilibrio relativo se estudiará analizando la función potencial, debiéndose incluir en el mismo tanto el peso de la varilla como la fuerza de inercia correspondiente a la aceleración de arrastre.
Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{a}_O$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son nulas, la fuerza que actúa sobre un elemento infinitesimal de la varilla es:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\text{arr}} = \mathrm{d}m\,\omega^2\,x\boldsymbol{i} \tag{1}$$

siendo x la distancia del elemento dm al eje Oy. Por tanto la acción de la fuerza centrífuga se puede interpretar como la de un muelle de repulsión. La función potencial asociada a esta fuerza es:

$$\mathrm{d}V_{\text{arr}} = -\frac{1}{2}\omega^2\,x^2\,\mathrm{d}m \tag{2}$$

Expresando x y dm en función de θ y ξ (ver figura):

$$x = r\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta + \xi\cos\theta, \qquad \mathrm{d}m = \frac{m}{r}\mathrm{d}\xi \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en (2) e integrando, se obtiene:

$$V_{\text{arr}} = -m\omega^2\int_{\xi=-\frac{r}{2}}^{\xi=\frac{r}{2}}\left[\frac{3}{8}r\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{2r}\xi^2\cos^2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right]\mathrm{d}\xi = -\frac{1}{8}m\omega^2r^2\left(\frac{1}{3}\cos^2\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta\right) \tag{4}$$

El potencial se obtiene sumando a la expresión anterior el potencial correspondiente al peso de la varilla. La expresión resultante es:

$$V = -\frac{\sqrt{3}}{2}mgr\cos\theta - \frac{1}{8}m\omega^2r^2\left(\frac{1}{3}\cos^2\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta\right) \tag{5}$$

Las posiciones de equilibrio se obtienen resolviendo los valores de θ para los cuales la función V alcanza máximos o mínimos relativos:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0 \Rightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}g - \frac{2}{3}\omega^2 r\cos\theta\right)\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{6}$$

Las soluciones de (6) son:

$$\theta = 0 \tag{7}$$
$$\theta = \pi \tag{8}$$
$$\cos\theta = \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{g}{\omega^2 r}, \qquad \text{que existirá solo si } \omega^2 \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{g}{r} \tag{9}$$

2.— Las posiciones de equilibrio estable corresponden a mínimos locales de la función potencial. Derivando dos veces en (5):

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{2}{3}m\omega^2 r^2(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}mgr\cos\theta \tag{10}$$

Sustituyendo la posición (7) en (10) resulta:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=0} = \frac{\sqrt{3}}{2}mgr - \frac{2}{3}m\omega^2 r^2 \Rightarrow \begin{cases} \omega^2 & < \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{g}{r}, \quad \theta = 0 \text{ es estable} \\ \omega^2 & > \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{g}{r}, \quad \theta = 0 \text{ es inestable} \end{cases} \tag{11}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2}mgr - \frac{2}{3}m\omega^2 r^2 \Rightarrow \theta = \pi \text{ es inestable para cualquier valore de } \omega \tag{12}$$

Para la posición de equilibrio expresada en (9):

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2} = m\frac{16\omega^4 r^2 - 27g^2}{24\omega^2 r} > 0 \tag{13}$$

que es positiva para los valores de ω que verifican la condición de existencia de esta solución (ver ecuación (9)). Finalmente, si $\omega^2 = 3\sqrt{3}g/4r$, la posición (9) coincide con la posición (7) y se obtiene:

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{\mathrm{d}^3V}{\mathrm{d}\theta^3} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}mgr > 0 \Rightarrow \text{ El equilibrio es estable} \tag{15}$$

En resumen:

$$\begin{cases} \text{si } \omega^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{g}{r}, & \text{dos posiciones: } \theta = \pi \text{ (inestable)}, \theta = 0 \text{ (estable)} \\ \text{si } \omega^2 > \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{g}{r}, & \text{tres posiciones: } \cos\theta = \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{g}{r}, \text{ (estable)}, \theta = \pi \text{ (inestable)}, \\ & \theta = 0 \text{ (inestable)}. \end{cases}$$