Mecánica

3.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (29 de marzo 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 5/25) Tiempo: 30 min.

Responder a la siguiente cuestión teórico-práctica *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Deducir las ecuaciones fundamentales de la dinámica de un cuerpo al cual se incorpora masa en puntos $\boldsymbol{r}_i\,(i = 1, \dots N)$, con tasas respectivas q_i kg/s y velocidad relativa uniforme en todos los puntos $\boldsymbol{w}$ m/s.

Como *aplicación*, obtener la fuerza variable F con la que hay que tirar verticalmente de una cadena homogénea, de densidad μ, apilada sobre un plano horizontal fijo, para que se eleve con una velocidad constante v según la vertical.

Consideramos en primer lugar la incorporación de masa a una partícula de masa m y velocidad $\boldsymbol{v}$, con tasa $q = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$, teniendo antes de incorporarse velocidad relativa $\boldsymbol{w}$, es decir velocidad absoluta $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$. Llamando a las fuerzas exteriores $\boldsymbol{f}$, el balance de la cantidad de movimiento arroja

$$\boldsymbol{f}\mathrm{d}t = (m + q\mathrm{d}t)(\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}) - [m\boldsymbol{v} + q\mathrm{d}t\,(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})] \approx m\mathrm{d}\boldsymbol{v} - q\mathrm{d}t\,\boldsymbol{w}\ ,$$

es decir

$$\boldsymbol{f} + q\boldsymbol{w} = m\dot{\boldsymbol{v}}\ , \tag{1}$$

lo que se puede interpretar como una fuerza adicional de valor $q\boldsymbol{w}$.

En el sistema del enunciado, para cada punto donde se incorpora masa, hay que considerar una fuerza adicional de valor $q_i\boldsymbol{w}$. Así, podemos plantear el balance de cantidad de movimiento para el conjunto:

$$M\dot{\boldsymbol{v}}_G = \boldsymbol{F} + \sum_{i=1}^{N} q_i\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + q\boldsymbol{w}\ , \tag{2}$$

siendo M la masa total, $\boldsymbol{F}$ la resultante de fuerzas exteriores, y $q \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} q_i$ la tasa global de aumento de masa. Para el momento cinético $\boldsymbol{H}_G$ la ecuación de balance es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{M}_G + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge q_i\boldsymbol{w} = \boldsymbol{M}_G + \boldsymbol{r}_q \wedge q\boldsymbol{w}\ , \tag{3}$$

siendo $\boldsymbol{M}_G$ la resultante de momentos en G y $\boldsymbol{r}_q \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{N} q_i\boldsymbol{r}_i\right)/q$.

Aplicación.— Denominamos x la longitud de cadena erecta, cuya masa será μx y su velocidad v. Las fuerzas exteriores son $F - \mu xg$, la tasa de incorporación de masa $q = \mu v$ y la velocidad relativa $(0 - v) = -v$, por lo que

$$F - \mu xg + \mu v(-v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \mu xg + \mu v^2}\ .$$