Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

# Mecánica

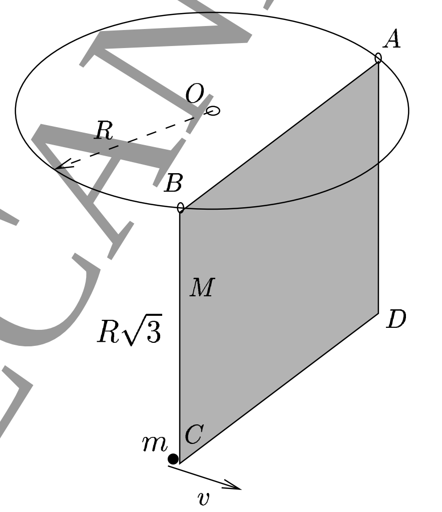
3.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (29 de marzo de 2003)

| *Apellidos* | *Nombre* | *N.º* | *Grupo* |
|---|---|---|---|
| | | | |

*Ejercicio 3.º* (puntuación: 10/25) Tiempo: 60 min.

Una placa cuadrada de lado $R\sqrt{3}$ y masa $M$ se encuentra suspendida de una circunferencia horizontal fija y lisa de radio $R$ por dos de sus vértices $A$ y $B$. Ante una acción externa, la placa puede adquirir el movimiento más general posible que mantenga estos vértices sobre la circunferencia fija.

Cuando la placa está en reposo en posición vertical incide sobre ella perpendicularmente una partícula de masa $m$, que impacta en un punto muy próximo al vértice $C$ con velocidad $v$. Se supone que la placa es lisa y que el impacto es tal que se observa que la partícula queda en reposo inmediatamente después de aquél.




Se pide:

1. Cálculo del campo de velocidades de la placa inmediatamente después del impacto;
2. Expresión de las reacciones impulsivas en los vértices $A$ y $B$;
3. Calcular el coeficiente de restitución ($e$) del impacto entre la partícula y la placa en función de la relación entre $m$ y $M$.

—————— ⋆ ——————

**1.** El movimiento más general de la placa es la superposición de una rotación $\dot{\psi}$ alrededor de la vertical fija que para por $O$ y una rotación $\dot{\theta}$ alrededor de la arista $AB$. Esto sugiere emplear un sistema de referencia $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ de manera que el versor $\boldsymbol{k}$ es vertical, el $\boldsymbol{j}$ es horizontal y perpendicular a la placa, y el $\boldsymbol{i}$ es perpendicular a los anteriores formando un triedro a derechas, de forma que la velocidad de rotación se expresa como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{k} + \dot{\theta}\boldsymbol{i} \quad ,$$

que determina completamente el campo de velocidades de la placa inmediatamente después del impacto. Concretamente, la velocidad del centro de masa se expresa como:

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'G} = -\frac{R}{2}\dot{\psi}\boldsymbol{i} + \frac{R\sqrt{3}}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{j} \quad (1)$$

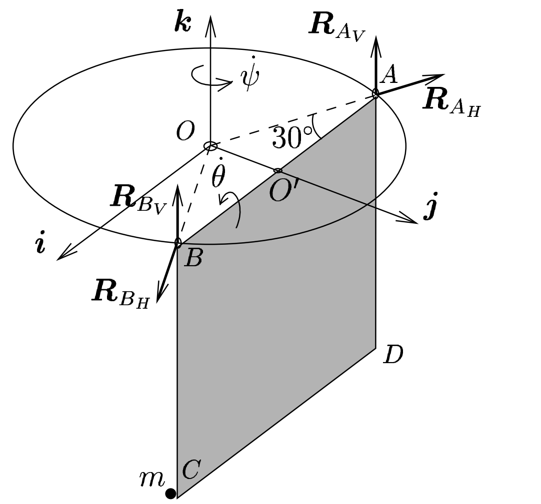



Figura 1: *Definición del sistema de referencia empleado y de las impulsiones sobre el sistema placa-partícula.*

siendo $O'$ el punto medio de la arista $AB$.

Considerando el sistema formado por la placa y la partícula, las únicas impulsiones externas son las reactivas en los apoyos $A$ y $B$. Puesto que la circunferencia en que se mueven es lisa, cada una de ellas está contenida en un plano vertical que pasa por $O$, y tiene por tanto una componente vertical y otra horizontal radial, tal y como muestra la Figura 1. Además, las componentes verticales deben ser iguales en módulo y de sentido contrario, puesto que tanto $\boldsymbol{v}_G$ como la impulsión de la partícula son horizontales, por lo que:

$$\boldsymbol{R}_{B_V} = -\boldsymbol{R}_{A_V} \tag{2}$$

Esta configuración de impulsiones en $A$ y $B$ sugiere plantear la ecuación de balance de momento cinético en $O$, puesto que de esta manera las impulsiones horizontales no aparecen. El momento de todas las impulsiones en $O$ se expresa como:

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{I}_i^{ext} = \frac{R}{2}\underbrace{(R_{A_V} + R_{B_V})}_{=0}\boldsymbol{i} + \frac{R\sqrt{3}}{2}\underbrace{(R_{A_V} - R_{B_V})}_{=2R_{A_V}}\boldsymbol{j} = R\sqrt{3}R_{A_V}\boldsymbol{j}$$

Por otro lado, el momento cinético de la placa inmediatamente después del impacto se obtiene mediante la expresión:

$$\boldsymbol{H}_{O_d} = \boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\Omega} + M\boldsymbol{v}_G \wedge \boldsymbol{GO} \quad , \tag{3}$$

siendo $G$ el centro de masa de la placa. Hay que observar que, aunque el punto $O$ tiene velocidad nula, no es correcto expresar este momento cinético como $\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O\boldsymbol{\Omega}$ puesto que $O$ no pertenece a la placa.

El tensor de inercia $\boldsymbol{I}_G$ se expresa en el triedro $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ como:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_x \end{pmatrix} \quad ; \quad I_x = \frac{1}{4}MR^2 \quad , \qquad I_y = \frac{1}{2}MR^2 \quad ,$$

y teniendo en cuenta la expresión de $\boldsymbol{v}_G$ dada (1) y que $\boldsymbol{GO} = -(R/2)\boldsymbol{j} + (R\sqrt{3}/2)\boldsymbol{k}$, la expresión (3) resulta:

$$\boldsymbol{H}_{O_d} = MR^2\dot{\theta}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{4}MR^2\dot{\psi}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}MR^2\dot{\psi}\boldsymbol{k}$$

Teniendo en cuenta además que el momento cinético inicial se debe exclusivamente a la partícula:

$$H_{O_i} = \boldsymbol{OC} \wedge (mv\boldsymbol{j}) = mvR\sqrt{3}\boldsymbol{i} + mv\frac{R\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k} \quad ,$$

con la expresión del balance de momento cinético $\boldsymbol{H}_{O_d} - \boldsymbol{H}_{O_i} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{I}_i^{ext}$ se obtienen las ecuaciones:

$$MR^2\dot{\theta} = mvR\sqrt{3} \tag{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}MR^2\dot{\psi} = R\sqrt{3}R_{A_V} \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\psi} = mv\frac{R\sqrt{3}}{2} \quad , \tag{6}$$

que permiten determinar completamente el campo de velocidades inmediatamente después del impacto:

$$\dot{\theta} = \sqrt{3}\frac{mv}{MR} = \dot{\psi} \tag{7}$$

**2.** El balance de cantidad de movimiento horizontal al conjunto placa-partícula $\Phi_d - \Phi_i = \sum_i \boldsymbol{I}_i^{ext}$, empleando la expresión de $\boldsymbol{v}_G$ dada en (1) permite obtener otras dos ecuaciones:

$$-M\frac{R}{2}\dot{\psi} = \frac{\sqrt{3}}{2}(R_{B_H} - R_{A_H}) \tag{8}$$

$$M\sqrt{3}R\dot{\theta} - mv = R_{B_H} + R_{A_H} \tag{9}$$

Con las expresiones (5), (8) y (9) se calculan las reacciones buscadas:

$$R_{A_V} = \frac{\sqrt{3}}{4}mv = -R_{B_V} \quad , \qquad R_{A_H} = mv \quad , \qquad R_{B_H} = 0 \tag{10}$$

**3.** La expresión del coeficiente de restitución del impacto entre la placa y la partícula es:

$$e = -\frac{\boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{j}}{-v} \tag{11}$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{v}_C$ se puede calcular mediante la expresión:

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{GC} = -\frac{R}{2}\dot{\psi}\boldsymbol{i} + \frac{R\sqrt{3}}{2}(\dot{\psi} + 2\dot{\theta})\boldsymbol{j} = \frac{\sqrt{3}m}{2M}v(-\boldsymbol{i} + 3\sqrt{3}\boldsymbol{j}) \quad ,$$

el coeficiente de restitución resulta:

$$e = \frac{9m}{2M}$$