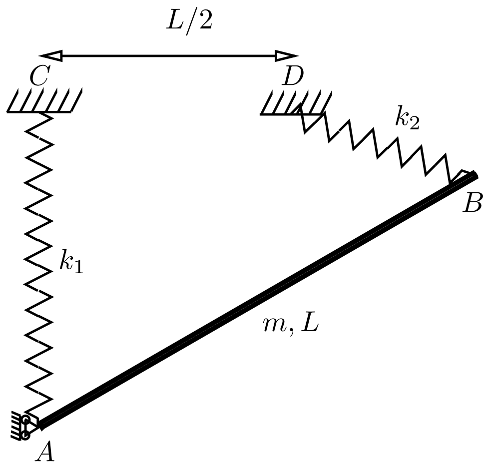
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL (6 de Junio de 2003)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/25) Tiempo: 60 min.



Se considera el sistema mecánico de la figura, formado por una varilla pesada de masa m y longitud L, unida por sus extremos A y B a dos muelles de longitud natural nula y constantes elásticas k_1 y k_2 respectivamente. A su vez los muelles están unidos a sendos puntos fijos C y D situados a la misma altura y separados $L/2$. El extremo A está obligado a moverse únicamente sobre la recta vertical bajo C, mientras que la varilla permanece en todo instante en el plano vertical fijo que contiene a CD. Para el caso en que $k_2 = 2k_1$ se pide:

1. Valor de k_1 para que la posición en la que la varilla forma 60° con la horizontal, estando B por encima de A, sea de equilibrio.

2. Ecuaciones diferenciales del movimiento.

3. Para las pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio determinada en el primer apartado:

   a) Ecuaciones diferenciales del movimiento linealizadas

   b) Frecuencias propias

   c) Expresión de las coordenadas normales en función de los grados de libertad considerados.

1.— La posición de equlibrio indicada es tal que el extremo B de la barra queda en la vertical de D. Denominando $y = \overline{AC}$ y estableciendo las ecuaciones cardinales de la estática,

$$k_1 y + k_2 \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} L \right) = Mg \ ; \quad mg \frac{L}{4} = \frac{L}{2} k_2 \left((y - \frac{\sqrt{3}}{2} L \right) \ ,$$

de donde se deduce

$$k_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{mg}{L} \ ; \quad y_{\text{eq}} = \sqrt{3} L \ . \tag{1}$$

2.— El sistema tiene dos grados de libertad: (y, θ), enominando θ al ángulo que forma la varilla con la horizontal. Las expresiones de energía cinética y potencial son

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{y}^2 + \frac{L^2}{4} \dot{\theta}^2 - \dot{y} \dot{\theta} L \cos\theta \right) + \frac{1}{24} m L^2 \dot{\theta}^2 \ ;$$
$$V = \frac{1}{2} k_1 y^2 + \frac{1}{2} 2k_1 \left[\left(L\cos\theta - \frac{L}{2} \right)^2 + (y - L \operatorname{sen}\theta)^2 \right] - mg \left(y - \frac{L}{2} \operatorname{sen}\theta \right) \ .$$

La función Lagrangiana vale

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2 + \frac{L^2}{3}\dot{\theta}^2 - \dot{y}\dot{\theta}L\cos\theta\right) - \frac{3}{2}k_1y^2 + k_1L^2\cos\theta + 2k_1yL\operatorname{sen}\theta + mg\left(y - \frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\right) \ . \quad (2)$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange del movimiento:

$$0 = m\ddot{y} - \frac{1}{2}mL\ddot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}mL\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + 3k_1y - 2k_1L\operatorname{sen}\theta - mg \quad (3)$$

$$0 = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}mL\ddot{y}\cos\theta + k_1L^2\operatorname{sen}\theta - 2k_1yL\cos\theta \ + \frac{1}{2}mgL\cos\theta \ . \quad (4)$$

3.— Teniendo en cuenta pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio ($y_{\text{eq}} = \sqrt{3}L$, $\theta_{\text{eq}} = 60°$),

$$y = y_{\text{eq}} + \epsilon_y; \quad \theta = \theta_{\text{eq}} + \epsilon_\theta,$$

sustituimos en las ecuaciones (3) y (4) y linealizamos despreciando infinitésimos de orden superior al primero:

$$\begin{aligned} 0 &= m\ddot{\epsilon}_y - \frac{1}{4}mL\ddot{\epsilon}_\theta + 3k_1\epsilon_y - k_1L\epsilon_\theta \ ; \\ 0 &= -\frac{1}{4}mL\ddot{\epsilon}_y + \frac{1}{3}mL^2\ddot{\epsilon}_\theta - k_1L\epsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{3}mgL\epsilon_\theta \ . \end{aligned} \quad (5)$$

En las ecuaciones anteriores identificamos las matrices de masa y rigidez:

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} m & -\frac{1}{4}mL \\ -\frac{1}{4}mL & \frac{1}{3}mL^2 \end{pmatrix} \ ; \quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{mg}{L} & -\frac{\sqrt{3}}{6}mg \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}mg & \frac{\sqrt{3}}{3}mgL \end{pmatrix} \ . \quad (6)$$

Las frecuencias propias se obtienen mediante la ecuación característica,

$$\det([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]) = \frac{13}{48}m^2L^2\omega^4 - \frac{5\sqrt{3}}{12}m^2gL\omega^2 + \frac{5}{12}m^2g^2 = 0 \ ,$$

cuyas soluciones son

$$\omega_1^2 = \frac{2}{13}(5\sqrt{3} + \sqrt{10})\frac{g}{L} \ ; \quad \omega_2^2 = \frac{2}{13}(5\sqrt{3} - \sqrt{10})\frac{g}{L} \ .$$

Los vectores propios correspondientes a cada frecuencia propia son

$$([\mathbf{K}] - \omega_1^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}_1\} = \{\mathbf{0}\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{a}_1\}^{\mathrm{T}} = \left(1, \ \frac{6+\sqrt{30}}{2L}\right)$$

$$([\mathbf{K}] - \omega_2^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}_2\} = \{\mathbf{0}\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{a}_2\}^{\mathrm{T}} = \left(1, \ \frac{6-\sqrt{30}}{2L}\right)$$

Las coordenadas normales (u_1, u_2) son las amplitudes de los modos de vibración, es decir

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_y \\ \epsilon_\theta \end{Bmatrix} = u_1\{\mathbf{a}_1\} + u_2\{\mathbf{a}_2\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{6+\sqrt{30}}{2L} & \frac{6-\sqrt{30}}{2L} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \ .$$