Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (6 de Junio de 2003)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 7,5/45) Tiempo: 30 min.

Responder a la siguiente cuestión teórico-práctica *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Deducir las ecuaciones diferenciales de la dinámica que definen el movimiento de una partícula sobre una superficie lisa $f(x, y, z)$. *Aplicarlo* al estudio de una partícula pesada de masa m que se mueve sobre el paraboloide $z = (x - a)^2 + (y - b)^2$.

La normal a la superficie lisa viene dada por $\mathbf{grad}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}$. Si existen otras fuerzas aplicadas $\boldsymbol{F}$, además de la reacción normal (que será $\boldsymbol{N} = \lambda\, \mathbf{grad}\, f$), la ecuación dinámica será:

$$\boldsymbol{F} + \lambda\, \mathbf{grad}\, f = m\ddot{\boldsymbol{r}} \ . \tag{1}$$

El problema queda planteado con las tres ecuaciones escalares (1) y la ecuación de la superficie: $f(x, y, z) = 0$, para las cuatro incógnitas (x, y, z, λ).

Aplicación: El gradiente del paraboloide en un punto genérico es:

$$\mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = 2(x - a)\boldsymbol{i} + 2(y - b)\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \tag{2}$$

Considerando, como es habitual, que la vertical ascendente corresponde al eje z, la fuerza correspondiente al peso de la partícula es:

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{k} \tag{3}$$

Sustituyendo (2,3) en (1) y teniendo en cuenta que además es necesario considerar la propia ecuación de la superficie, el sistema de ecuaciones que permite calcular el movimiento de la partícula sobre el paraboloide es:

$$\begin{aligned} 2\lambda(x - a) &= m\ddot{x} \ , \\ 2\lambda(y - b) &= m\ddot{y} \ , \\ -\lambda - mg &= m\ddot{z} \ , \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 - z &= 0 \ . \end{aligned}$$

Nota adicional.— En el caso en que la superficie estuviese definida en forma paramétrica, $\boldsymbol{r}(u, w)$, podríamos proyectar la ecuación (1) según $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$; teniendo en cuenta $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\partial \boldsymbol{r}/\partial u)\mathrm{d}u + (\partial \boldsymbol{r}/\partial w)\mathrm{d}w$ y llamando $Q_u \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{F} \cdot (\partial \boldsymbol{r}/\partial u)$, $Q_w \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{F} \cdot (\partial \boldsymbol{r}/\partial w)$:

$$Q_u \mathrm{d}u + Q_w \mathrm{d}w = m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}T \ .$$

La expresión resultante es una ecuación diferencial en función de las coordenadas (u, v) de la superficie.