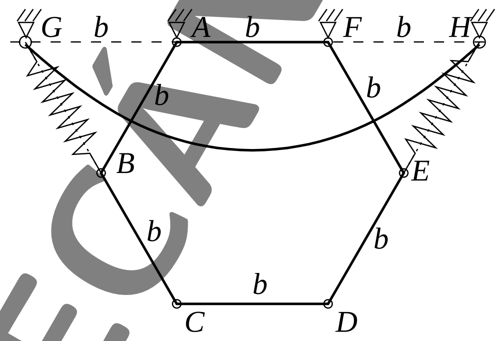
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO y 4.º PARCIAL (8 de septiembre de 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/45 ó 10/25) Tiempo: 60 min.

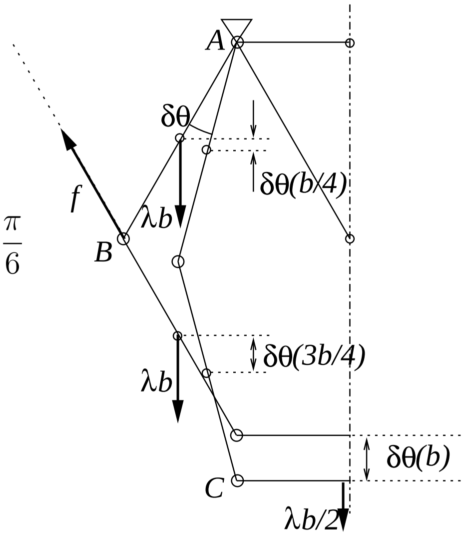
Un exágono $ABCDEF$ está formado por 6 barras iguales articuladas entre sí, de longitud b y peso por unidad de longitud λ cada una, suspendido por las articulaciones A, F en puntos fijos. Sobre el exágono actúan a su vez dos resortes BG y EH cuya acción es tal que la configuración de equilibrio forma un exágono regular (véase la figura adjunta). Se pide:



1. Fuerza ejercida por los resortes para que la configuración de equilibrio sea la descrita.
2. Los extremos G, H de los resortes están unidos a través de sendas poleas lisas y fijas de pequeño diámetro a un cable flexible e inextensible que cuelga entre ambas, sin que le estorben las barras, siendo su peso $q = (2\sqrt{3}/5)\lambda$ por unidad de longitud. Para facilitar la solución, se utilizará la aproximación de la catenaria por una parábola, considerándose la carga q constante por unidad de abscisa del cable. Calcular en el punto más bajo del cable la ordenada así como la tensión.
3. Resolver de nuevo el cable del apartado anterior como una catenaria (peso unitario constante por unidad de longitud del cable), calculando las mismas magnitudes. (tomar como primera aproximación para la solución numérica iterativa la de la parábola anteriormente hallada.)

⋆

1.— La forma más sencilla de plantear el equilibrio es mediante el principio de trabajos virtuales. Suponemos un desplazamiento virtual (compatible) $\delta\theta$, y calculamos el trabajo virtual de los pesos de las barras y de la fuerza f del resorte. Consideramos por simetría sólo la mitad izquierda del exágono (ver figura).



$$\begin{aligned}\delta W &= \lambda b\frac{b}{2}\delta\theta \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \lambda b\frac{3b}{2}\delta\theta \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \frac{\lambda b}{2}2b\delta\theta \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - fb\delta\theta\cos\frac{\pi}{6}\\ &= \lambda b\frac{b}{4}\delta\theta + \lambda b\frac{3b}{4}\delta\theta + \frac{\lambda b}{2}b\delta\theta - fb\delta\theta\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \qquad \forall\delta\theta,\end{aligned}$$

luego

$$f = \sqrt{3}\lambda b.$$

2.— La tensión en el punto más alto de la parábola es la que transmiten los resortes a través de las poleas, $T = f = \sqrt{3}\lambda b$. La aproximación de la parábola supone la carga q constante por unidad de abscisa, por lo que la tensión horizontal es

$$T_{0,\text{par}} = \sqrt{3b^2\lambda^2 - (3b/2)^2q^2} = 2bq$$

La ecuación de la parábola es $y = x^2/(2a)$, de donde podemos calcular la flecha en el centro:

$$a = \frac{T_{0,\mathrm{par}}}{q} = 2b; \quad f_{\mathrm{par}} = \frac{x^2}{2a} = \frac{(3b/2)^2}{2a} = \frac{9}{16}b = 0{,}5625b.$$

3. Suponiendo de forma más precisa el peso del cable constante por unidad de longitud del mismo se obtiene la catenaria,

$$y = a\cosh\frac{x}{a},$$

siendo en principio desconocido el parámetro a de la catenaria. La tensión total en un punto vale qy, por lo que imponiendo ésta en el extremo resulta

$$qa\cosh(\frac{3b/2}{a}) = \sqrt{3}\lambda b = \frac{5}{2}qb$$

Se obtiene una ecuación no lineal que puede reescribirse en función de la variable auxiliar $\xi = b/a$:

$$\cosh\frac{3}{2}\xi - \frac{5}{2}\xi = 0\ .$$

La solución se obtiene numéricamente aplicando el método de linealización de Newton. El algoritmo iterativo es

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)},$$

siendo $f' = \mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$. Tomando como valor inicial para las iteraciones el resultado de la aproximación parabólica, en tan sólo cuatro iteraciones se obtiene una solución con seis dígitos exactos:

n	ξ	$f(\xi)$	$\Delta\xi = -f/f'$
0	0,500000	$4{,}46833 \cdot 10^{-2}$	$3{,}52802 \cdot 10^{-2}$
1	0,535280	$1{,}83366 \cdot 10^{-3}$	$1{,}57805 \cdot 10^{-3}$
2	0,536858	$3{,}75611 \cdot 10^{-6}$	$3{,}24582 \cdot 10^{-6}$
3	0,536862	$2{,}00000 \cdot 10^{-11}$	$1{,}72830 \cdot 10^{-11}$
4	$\boxed{0{,}536862}$		

Los resultados pedidos son por tanto:

$$a = \frac{b}{0{,}536862} = 1{,}86268b\ ; \quad T_0 = aq = 1{,}86268bq\ ;$$

$$f = a\cosh\frac{3b/2}{a} - a = 0{,}637322b.$$