Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

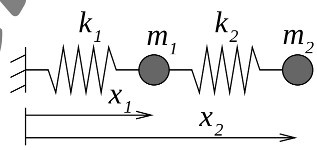
EXAMEN 4.º PARCIAL (8 de septiembre de 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 5/25) Tiempo: 45 min.

Responder a la siguiente cuestión teórico-práctica *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Sea un sistema mecánico conservativo definido por coordenadas generalizadas libres $\{q_i,\, i = 1, \dots n\}$, del cual se supone conocida la Lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. *Definir* la función Hamiltoniana. *Expresar* las ecuaciones canónicas (o de Hamilton), *discutiendo* la relación que guardan con las ecuaciones de Lagrange. *Aplicar* al caso de la figura, obteniendo la Hamiltoniana y las ecuaciones canónicas.



La *función Hamiltoniana* se define como la transformada de Legendre de la Lagrangiana respecto de las velocidades generalizadas:

$$H(q_i, p_i, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L, \tag{1}$$

siendo $p_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial L/\partial \dot{q}_i$, denominados *momentos generalizados.* A diferencia de la Lagrangiana, la Hamiltoniana se expresa en función de las coordenadas q_i, los momentos p_i y el tiempo t; en la ecuación (1) deben eliminarse las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$ en favor de los momentos p_i.

Tomando el diferencial de la expresión (1),

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

donde se han empleado la definición de momentos generalizados y las ecuaciones de Lagrange ($\partial L/\partial q_i = \dot{p}_i$). Identificando coeficientes en la expresión anterior se obtienen las derivadas parciales de H:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i, \quad i = 1, \dots n; \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i, \quad i = 1, \dots n; \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2}$$

CÁTEDRA DE MECÁNICA

Se denominan *ecuaciones canónicas* o *de Hamilton* a los dos conjuntos de n ecuaciones cada uno $(2)_1$ y $(2)_2$. Estas constituyen un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, y definen la evolución del sistema dinámico Hamiltoniano, formulado con $2n$ coordenadas consideradas independientes (q_i, p_i). En esto se diferencian de las *ecuaciones de Lagrange*, que son n ecuaciones diferenciales pero de 2.º orden. En ambos casos se necesitan $2n$ condiciones iniciales para plantear el problema, y aunque la formulación sea distinta ambos conjuntos de ecuaciones son equivalentes, para un problema bien planteado admiten idéntica solución.

Para el *ejemplo de aplicación* propuesto la Lagrangiana es

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2; \tag{3}$$

el cambio de coordenadas entre velocidades y momentos generalizados es

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = \frac{p_1}{m_1}, \\ p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \frac{p_2}{m_2}, \end{aligned} \tag{4}$$

por lo que resulta la siguiente expresión de la Hamiltoniana (eliminando como se ha dicho las velocidades generalizadas):

$$\begin{aligned} H &= p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 - \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{m_1} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{m_2} + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Aplicando $(2)_1$ y $(2)_2$ resultan finalmente las ecuaciones canónicas:

$$\dot{x}_1 = \frac{p_1}{m_1}; \qquad \dot{x}_2 = \frac{p_2}{m_2}; \tag{6}$$

$$\dot{p}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1); \quad \dot{p}_2 = -k_2(x_2 - x_1). \tag{7}$$

De las anteriores, el primer grupo de ecuaciones (6) coincide con el cambio de coordenadas (4); el segundo grupo (7) constituye las ecuaciones que podríamos denominar propiamente de la dinámica, equivalentes a las ecuaciones de Lagrange si se sustituyen los momentos p_i por sus valores en función de $\dot{q}_i$.

CÁTEDRA DE MECÁNICA