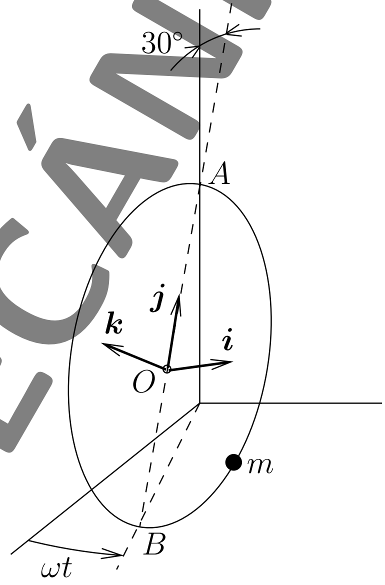
Mecánica

1.^{er} EXAMEN PARCIAL (22 de noviembre de 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un aro de radio R se mueve de forma que uno de sus diámetros AB gira alrededor de la vertical con velocidad angular ω constante, siendo el punto A fijo. Además el plano del aro forma en todo momento un ángulo de 30° con la vertical. Una partícula pesada de masa m puede moverse con ligadura bilateral sobre el aro sin que exista fricción.
Por conveniencia se considera un sistema móvil auxiliar ligado al aro $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, siendo O el centro del aro, $\boldsymbol{i}$ un versor horizontal, $\boldsymbol{j}$ un versor según OA y $\boldsymbol{k}$ perpendicular a los anteriores formando un triedro a derechas.



Se pide

1. Expresión de la velocidad de rotación absoluta del aro en el sistema móvil ligado a éste;
2. Expresión de la aceleración absoluta de un punto material genérico del aro en el sistema móvil ligado a éste;
3. Ecuación diferencial del movimiento de la partícula en el aro;
4. Expresión de la reacción que el aro ejerce sobre la partícula en dirección perpendicular al plano de aquél.

⋆

1.— El movimiento del aro es una rotación alrededor de la vertical fija que pasa por A, con componentes en el sistema móvil dadas por:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k} \right)$$

2.— La aceleración de un punto material P genérico del aro se puede calcular a partir del punto fijo A mediante la expresión del campo de aceleraciones:

$$\boldsymbol{a}_P = \underbrace{\boldsymbol{a}_A}_{=\boldsymbol{0}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{AP} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{AP}) \qquad (1)$$

Denotando por φ al ángulo que forma OP con el radio OB, se verifica $\boldsymbol{AP} = R \operatorname{sen}\varphi\, \boldsymbol{i} - R(1+\cos\varphi)\, \boldsymbol{j}$. Teniendo en cuenta además que la aceleración angular del aro es nula ($\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{0}$), la aceleración dada por (1) resulta:

$$\boldsymbol{a}_P = \frac{\omega^2 R}{4}\left[-4\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} + (1+\cos\varphi)\boldsymbol{j} - \sqrt{3}(1+\cos\varphi)\boldsymbol{k}\right] \tag{2}$$

3.— Una de las formas de calcular la aceleración de la partícula es emplear el sistema de referencia móvil ligado al aro, mediante la expresión:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}}$$

siendo $\boldsymbol{a}_{\text{arr}}$ la aceleración del punto material del aro sobre el que se encuentra la partícula en un instante arbitrario, y que ya se ha obtenido en el apartado anterior, expresión (2).

La aceleración relativa $\boldsymbol{a}_{\text{rel}}$ y la de Coriolis $\boldsymbol{a}_{\text{cor}}$ tienen la expresión:

$$\boldsymbol{a}_{\text{rel}} = (R\ddot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi)\boldsymbol{i} + (R\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + R\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\boldsymbol{j} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{cor}} = \omega R\dot{\varphi}\left(-\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j} - \sqrt{3}\cos\varphi\,\boldsymbol{k}\right) \tag{4}$$

La aceleración total de la partícula se obtiene sumando (2), (3) y (4). La ecuación del movimiento se obtiene proyectando esta aceleración $(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})$ segun la tangente al aro $\boldsymbol{\tau} = \cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j}$, mediante la relación:

$$a_\tau = a_x\cos\varphi + a_y\operatorname{sen}\varphi$$

Teniendo en cuenta que el peso tiene la expresión $\boldsymbol{P} = -mg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right)$ y que la reacción del aro según $\boldsymbol{\tau}$ es nula, se obtiene la ecuación diferencial del movimiento:

$$R\left[\ddot{\varphi} + \frac{\omega^2}{4}\operatorname{sen}\varphi\,(1 - 3\cos\varphi)\right] = -g\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\varphi$$

4.— La reacción del aro según la dirección perpendicular a su plano se obtiene directamente a partir de la componente según $\boldsymbol{k}$ de la aceleración de la partícula y la correspondiente proyección del peso:

$$ma_z = N_z - \frac{mg}{2} \quad\Longrightarrow\quad N_z = \frac{mg}{2} - m\omega R\sqrt{3}\left[\frac{\omega}{4}(1+\cos\varphi) + \dot{\varphi}\cos\varphi\right]$$