Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (20 de enero de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/30 ó 7,5/45) Tiempo: 45 min.

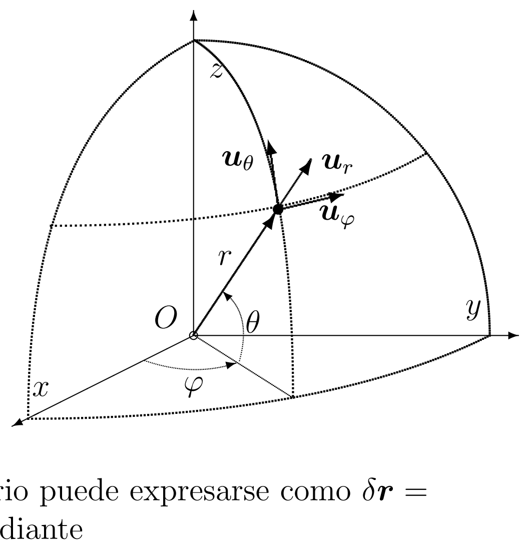
Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Definir las fuerzas generalizadas en la dinámica analítica de Lagrange. *Aplicación:* calcularlas para una partícula cuya configuración está definida mediante coordenadas esféricas (r, θ, φ), sometida a una fuerza de valor arbitrario, con componentes cartesianas (F_x, F_y, F_z).
(5 ó 3,75 ptos.)

Sea un sistema formado por un conjunto discreto de masas $\{m_i,\ i = 1, \dots N\}$, con posiciones $\boldsymbol{r}_i$. Suponemos que la configuración puede definirse asimismo mediante coordenadas generalizadas $\{q_j,\ j = 1, \dots n\}$, de forma que la posición de cada partícula podrá expresarse como función de estas últimas, $\boldsymbol{r}_i(q_j, t)$. Si se desarrolla la expresión del trabajo virtual para desplazamientos virtuales $\delta\boldsymbol{r}_i$,

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \delta q_j \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)}_{=Q_j} .$$

Se denominan fuerzas generalizadas a los términos Q_j, coeficientes de los desplazamientos virtuales generalizados δq_j en la expresión del trabajo virtual ($\delta W = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j$). Estas fuerzas pueden o no ser conservativas. En el caso en que lo fueren, podrán expresarse como derivadas de una función potencial $Q_j = -(\partial/\partial q_j)V(q_j)$ y el trabajo virtual será $\delta W = -\delta V(q_j)$.



Sean las coordenadas esféricas (φ, θ, r) definidas en la figura, asociadas a los vectores unitarios $(\boldsymbol{u}_\varphi, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{u}_r)$. La expresión de éstos en función del triedro cartesiano es

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_\varphi &= -\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{u}_\theta &= -\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{u}_r &= \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k} .
\end{aligned}$$

Por otra parte, un desplazamiento infinitesimal virtual arbitrario puede expresarse como $\delta\boldsymbol{r} = r\cos\theta\,\delta\varphi\,\boldsymbol{u}_\varphi + r\delta\theta\,\boldsymbol{u}_\theta + \delta r\,\boldsymbol{u}_r$. El trabajo virtual se expresa mediante

$$\begin{aligned}
\delta W = \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r} &= (F_x\,\boldsymbol{i} + F_y\,\boldsymbol{j} + F_z\,\boldsymbol{k}) \cdot (r\cos\theta\,\delta\varphi\,\boldsymbol{u}_\varphi + r\delta\theta\,\boldsymbol{u}_\theta + \delta r\,\boldsymbol{u}_r)\\
&= (-F_x\operatorname{sen}\varphi + F_y\cos\varphi)r\cos\theta\,\delta\varphi + (-F_x\operatorname{sen}\theta\cos\varphi - F_y\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + F_z\cos\theta)r\delta\theta\\
&\quad + (F_x\cos\theta\cos\varphi + F_y\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + F_z\operatorname{sen}\theta)\delta r\ ,
\end{aligned}$$

e identificando coeficientes se obtienen finalmente las fuerzas generalizadas:

$$Q_\varphi = (-F_x\operatorname{sen}\varphi + F_y\cos\varphi)r\cos\theta\,; \quad Q_\theta = (-F_x\operatorname{sen}\theta\cos\varphi - F_y\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + F_z\cos\theta)r\,;$$
$$Q_r = F_x\cos\theta\cos\varphi + F_y\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + F_z\operatorname{sen}\theta\ .$$

Se considera un sistema binario aislado formado por dos masas (m_1, m_2) que interactúan entre sí mediante una fuerza central $\boldsymbol{f}$ determinada. *Reducir* las ecuaciones para obtener las del movimiento relativo de una masa respecto de la otra, definiendo el concepto de masa reducida. Obtener la expresión de la energía cinética conjunta en función de la masa reducida.
(5 ó 3,75 ptos.)

Denominamos $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$ a las posiciones respectivas de cada partícula, y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ a la posición relativa de m_2 respecto a m_1. La fuerza sobre m_1 debido a m_2 es $\boldsymbol{f}_{12}$, y la recíproca sobre m_2 es $\boldsymbol{f}_{21} = -\boldsymbol{f}_{12}$. Las ecuaciones de la dinámica de cada partícula son

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{f}_{12}\,; \quad m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{f}_{21}\ ,$$

y operando se obtiene

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \frac{1}{m_2}\boldsymbol{f}_{21} - \frac{1}{m_1}\boldsymbol{f}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\boldsymbol{f}_{21}\,,$$

y denominando $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (masa reducida),

$$\boxed{\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{f}_{21}\,.}$$

Esta ecuación permite interpretar el movimiento relativo de m_2 respecto a m_1 como si fuera un sistema inercial, sustituyendo el valor de la masa m_2 por la masa reducida μ.

Por otra parte, operando con la expresión de la posición del centro de masa,

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{r}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \frac{\mu}{m_1}\boldsymbol{r}\,;$$

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_G - \frac{\mu}{m_1}\boldsymbol{r}\,; \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_G + \frac{\mu}{m_2}\boldsymbol{r}\,.$$

Así, desarrollando la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{\boldsymbol{r}}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\boldsymbol{r}}_2)^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\boldsymbol{r}}_G - \frac{\mu}{m_1}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\boldsymbol{r}}_G + \frac{\mu}{m_2}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{\boldsymbol{r}}_G)^2 + \frac{1}{2}\mu(\dot{\boldsymbol{r}})^2\,.}$$

Es decir, la energía cinética se descompone en dos términos, el primero representa la que tendría la masa total $(m_1 + m_2)$ concentrada en G, y el segundo representa la energía cinética del movimiento relativo, que se expresa a través de la masa reducida μ.