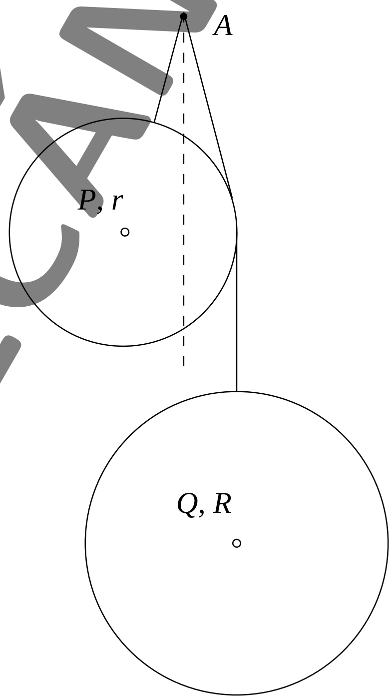
# Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL (12 de junio de 2004)

*Apellidos* *Nombre* *N.º* *Grupo*

*Ejercicio 3.º* (puntuación: 10/30 – 10/45) Tiempo: 60 min.

Dos esferas homogéneas, de pesos $P$ y $Q$, y radios respectivos $r$ y $R$, están conectadas entre sí mediante un hilo inextensible, de gran longitud y peso despreciable, cuyos extremos van unidos a sendos puntos de sus superficies. El hilo pasa sobre una pequeña polea lisa $A$. Se desea que el conjunto quede en equilibrio, según la disposición esquematizada en la figura (sin existir rozamiento entre hilo y esfera).




Se pide:

1. Demostrar que la vertical por $A$ debe ser bisectriz de los dos ramales del hilo, así como que el ramal izquierdo debe estar alineado con el centro de la esfera.

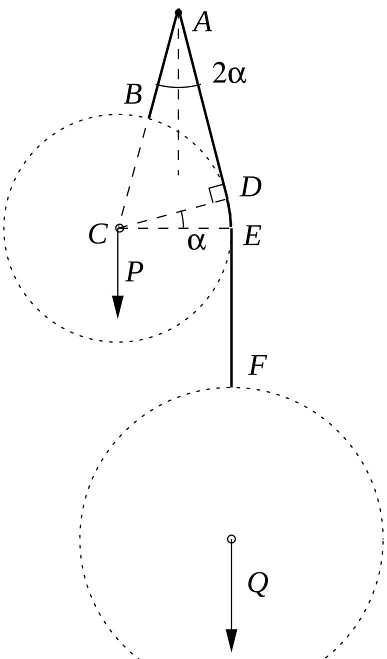
2. Para el caso $Q = 2P$, determinar la configuración de equilibrio.

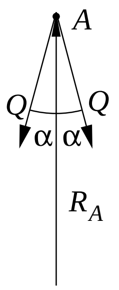
3. Demostrar que para que exista el equilibrio deseado, $P$ debe ser menor que $Q$, pero mayor que $Q(\sqrt{2} - 1)$.

4. Obtener la expresión analítica del potencial y demostrar que las posiciones de equilibrio posibles son estables.

---

**1.—** Puesto que el hilo no pesa su configuración de equilibrio consta de los tramos rectos $BA$ y $AD$, el tramo $DE$ según el círculo máximo de la esfera, y $EF$ vertical. La tensión en este último tramo es igual al peso de la esfera $Q$, y puesto que tanto el contacto $ED$ con la otra esfera como en la polea $A$ son lisos la tensión mantiene el mismo valor $Q$ a lo largo de todo el hilo.




Las únicas cargas exteriores sobre el sistema son los pesos $P$ y $Q$ y la reacción en $A$. Consecuentemente ésta debe ser vertical y de valor $R_A = P + Q$. Por otra parte $R_A$ debe equilibrar en la polea $A$ las dos tensiones $Q$ iguales en los tramos $BA$ y $AD$ por lo que obviamente coincidirá con la bisectriz de ambos tramos. Denominaremos $\alpha$ al ángulo que forma cada uno de los tramos del hilo con la vertical.

Por otra parte, la acción del tramo de hilo $DE$ sobre la esfera $P$ será una carga normal repartida uniformemente, cuya resultante es radial según la bisectriz del arco $DE$. Es inmediato comprobar que el ángulo de este tramo es $\angle ECD = \alpha$. Teniendo en cuenta que el peso también pasa por el centro $C$, por equilibrio de momentos el tramo $AB$ debe estar alineado con $C$.

CÁTEDRA DE MECÁNICA

**2.—** La ecuación del equilibrio se puede obtener igualando la reacción en $A$ con las componentes verticales de las tensiones de los hilos:

$$R_A = P + Q = 2Q\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = Q(2\cos\alpha - 1)} . \tag{1}$$

Otra manera de obtener esta ecuación sería planteando el equilibrio de la esfera $P$. La reacción del hilo, teniendo en cuenta que el tramo $ED$ abarca un ángulo $\alpha$, vale $2Q\,\mathrm{sen}(\alpha/2)$ y forma un ángulo $\alpha/2$ con la horizontal. Se obtiene

$$Q\cos\alpha = P + 2Q\,\mathrm{sen}(\alpha/2)\cdot\mathrm{sen}(\alpha/2) = P + Q(1-\cos\alpha) , \tag{2}$$

llegándose a la misma ecuación anterior (1).

Para el caso dado en el enunciado ($Q = 2P$) resulta

$$\cos\alpha = \frac{3}{4} \ \Rightarrow \ \alpha = 41{,}41^\circ$$

**3.—** La posición de equilibrio (1) es independiente de la longitud del hilo, siempre que esta sea suficiente, lo que se asegura en el enunciado. La longitud sobrante tan sólo originará un tramo vertical $EF$ más o menos largo.

La proporción entre los pesos de las esferas $P/Q$ en cambio modifica el ángulo $\alpha$ que determina la configuración de equilibrio. El límite máximo de $\alpha$ será de 45°, en cuyo caso el punto $B$ llegaría a coincidir con el $A$. En esta situación de (1) se deduce $P/Q = 2\cos 45^\circ - 1 = \sqrt{2} - 1$. La otra configuración límite se produce para el mínimo valor de $\alpha \to 0$, en cuyo límite sería $P/Q = 2\cos 0 - 1 = 1$. En consecuencia, la relación de pesos estará comprendida entre

$$\sqrt{2} - 1 < \frac{P}{Q} < 1 .$$

**4.—** Para obtener la expresión analítica del potencial debemos conocer la longitud de cada uno de los tramos del hilo. Llamando $L$ a la longitud total ($BADEF$):

$$\overline{BA} = \overline{CA} - r = \frac{r}{\mathrm{sen}\,2\alpha} - r; \quad \overline{AD} = \frac{r}{\mathrm{tg}\,2\alpha}; \quad \overline{DE} = r\alpha; \quad \overline{EF} = L - \left(\overline{BA} + \overline{AD} + \overline{DE}\right) .$$

Usando estos valores, la altura del centro de cada esfera (medida desde $A$) es

$$z_P = -\overline{CA}\cos\alpha = -\frac{r\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,2\alpha}; \quad z_Q = z_P - \overline{EF} - R , \tag{3}$$

y la expresión del potencial es

$$V(\alpha) = Pz_P + Qz_Q = -P\frac{r\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,2\alpha} + Q\left(-\frac{r\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,2\alpha} + \frac{r}{\mathrm{sen}\,2\alpha} + \frac{r}{\mathrm{tg}\,2\alpha} + r\alpha - r - L - R\right) . \tag{4}$$

La primera derivada resulta

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\alpha} &= Pr\frac{2\cos^3\alpha}{\mathrm{sen}^2\,2\alpha} + Qr\left[\frac{2\cos^3\alpha}{\mathrm{sen}^2\,2\alpha} - \frac{2\cos 2\alpha}{\mathrm{sen}^2\,2\alpha} - \frac{2}{\mathrm{sen}^2\,2\alpha} + 1\right] \\ &= \frac{2r\cos^3\alpha}{\mathrm{sen}^2\,2\alpha}\left[P + Q(1 - 2\cos\alpha)\right] ,\end{aligned} \tag{5}$$

donde podemos comprobar que para la estacionariedad, $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\alpha = 0$, se obtiene la misma condición (1). Derivando una segunda vez en esta posición de equilibrio,

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\alpha^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{2r\cos^3\alpha}{\mathrm{sen}^2\,2\alpha}\right)\underbrace{\left[P + Q(1-2\cos\alpha)\right]}_{=0} + \left(\frac{2r\cos^3\alpha}{\mathrm{sen}^2\,2\alpha}\right)2Q\,\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{Qr}{\mathrm{tg}\,\alpha} . \tag{6}$$

Se cumple $\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}\alpha^2 > 0$ para $0 < \alpha < \pi/4$, luego el equilibrio es estable.

CÁTEDRA DE MECÁNICA