Mecánica

EXAMEN FINAL (12 de Junio de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 5/45) Tiempo: 30 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Plantear con carácter general las ecuaciones que se obtendrían para la dinámica de un sistema mecánico general, por cada uno de los dos procedimientos siguientes: 1) Balance de cantidad de movimiento y de momento cinético (ecuaciones cardinales); 2) Principio de D'Alembert (definir previamente el concepto de desplazamientos virtuales). *Discutir* en cada caso si las ecuaciones son necesarias y suficientes para determinar la dinámica. *Aplicar* al caso concreto de un péndulo doble (sendos hilos iguales de longitud ℓ y masa puntual en el extremo m, con un extremo fijo y sometidos a la gravedad g), *definiendo* las ecuaciones que se obtendrían en cada caso (NO será necesario el desarrollo de las mismas). (5 ptos.)

Consideremos un sistema formado por un número finito de partículas, $\{m_i, i = 1, ...N\}$, con vectores posición $\boldsymbol{r}_i$ y dotadas de velocidades $\boldsymbol{v}_i$.

Ecuaciones cardinales

- Balance de cantidad de movimiento.

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt}\ , \quad \text{con} \quad \begin{cases} \boldsymbol{F} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{ext} & \text{(resultante de las fuerzas externas)} \\ \boldsymbol{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i & \text{(cantidad de movimiento del sistema)} \end{cases}$$

- Balance de momento cinético respecto de un punto fijo O:

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt}\ , \quad \text{con} \quad \begin{cases} \boldsymbol{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i^{ext} & \text{(momento de las fuerzas ext. respecto de } O) \\ \boldsymbol{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge m_i \boldsymbol{v}_i & \text{(momento cinético respecto a } O) \end{cases}$$

  Este balance puede plantearse también en el centro de masa G, en cuyo caso hay que redefinir adecuadamente el momento de las fuerzas externas y el momento cinético.

Estas 6 ecuaciones escalares son necesarias, pero en general no son suficientes para determinar la dinámica del sistema. Esto puede ser debido a que el número de grados de libertad del sistema sea mayor de 6, o como suele ser habitual, que aparezcan incógnitas adicionales asociadas a restricciones al movimiento del sistema (reacciones). En el caso de que el sistema esté compuesto por un único sólido rígido, estas ecuaciones cardinales sí que son necesarias y suficientes para determinar su dinámica.

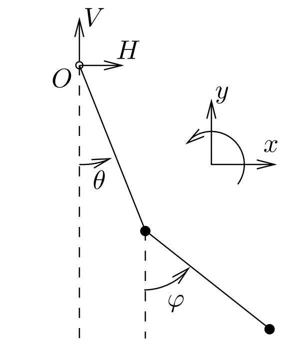

Figura 1: *Péndulo doble*

Para el caso concreto del péndulo doble descrito en el enunciado, y tomando como coordenadas generalizadas los dos ángulos (θ, φ) que se muestran en la Figura 1, se obtienen tres ecuaciones (dos de balance de cantidad de movimiento y una de momento cinético):

$$H = m\ell\left(2\ddot{\theta}\cos\theta - 2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + \ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi\right) \tag{1}$$

$$V - 2mg = m\ell\left(2\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + 2\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) \tag{2}$$

$$-mg\frac{\ell}{2}(3\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\varphi) = m\ell^2\left[2\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi})\cos(\theta - \varphi) - (\dot{\theta}^2 - \dot{\varphi}^2)\operatorname{sen}(\theta - \varphi)\right] \tag{3}$$

Este sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas (θ, φ, H, V) obviamente no determina por sí sólo la dinámica del sistema. Para lograrlo habría que estudiar subconjuntos del sistema, en este caso cada pareja partícula-hilo por separado; de esta forma van apareciendo nuevas reacciones incógnitas, pero eventualmente se logra finalmente obtener un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Concretamente, planteando el balance de momento cinético en O al conjunto formado por el hilo y la masa superiores aparece una nueva incógnita que es la tensión del hilo inferior (T). Planteando el balance de cantidad de movimiento al conjunto formado por el hilo y la masa inferiores, se obtiene otra ecuación que no añade ninguna incógnita, con lo que se llega a un sistema final de 5 ecuaciones con 5 incógnitas $(\theta, \varphi, H, V, T)$.

Principio de D'Alembert Un concepto básico previo es el de los *desplazamientos virtuales*. En un sistema de N partículas, se denomina así a un conjunto de desplazamientos infinitesimales arbitrarios de cada partícula del sistema, $\{\delta\boldsymbol{r}_i\,(i = 1, ...N)\}$. En contraposición a los *desplazamientos infinitesimales reales*, los desplazamientos virtuales son ficticios y tienen lugar en un instante dado («congelado») de tiempo.

El Principio de D'Alembert establece que en un sistema material sometido a enlaces lisos, la evolución dinámica del sistema está determinada, como condición necesaria y suficiente, por la anulación en todo instante del trabajo de las fuerzas aplicadas más el trabajo de las fuerzas de inercia para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces:

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{f}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i - \sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0\ , \qquad \forall\{\delta\boldsymbol{r}_i\}\ \text{comp.} \tag{4}$$

Tal y como se refleja en su enunciado, establece una condición necesaria y suficiente para determinar la dinámica del sistema. Para el caso concreto del péndulo doble:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1 &= \boldsymbol{f}_2 = -mg\boldsymbol{j}\\
\ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= \ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{i} + \ell(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\boldsymbol{j}\\
\ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= \ell(\ddot{\theta}\cos\theta + \ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta - \dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi)\boldsymbol{i} + \ell(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + \dot{\theta}^2\cos\theta + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\boldsymbol{j}\\
\delta\boldsymbol{r}_1 &= \ell\delta\theta(\cos\theta\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j})\\
\delta\boldsymbol{r}_2 &= \ell\delta\theta(\cos\theta\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j}) + \ell\delta\varphi(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j})
\end{aligned}$$

Las expresiones anteriores, introducidas en (4), conducen a una expresión de la forma:

$$Q_\theta\delta\theta + Q_\varphi\delta\varphi = 0\ , \qquad \forall\{\delta\theta, \delta\varphi\}\ ,$$

que proporciona las ecuaciones del movimiento $Q_\theta(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = 0$ y $Q_\varphi(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = 0$, en las que no aparecen las reacciones como incógnitas y determinan completamente la dinámica del sistema.