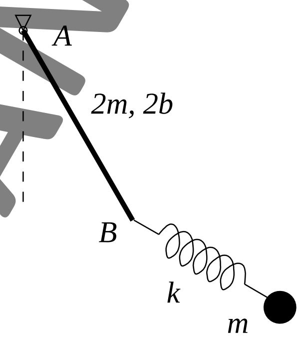
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO, REC. 4.º PARCIAL (6 de septiembre de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Una partícula de masa m está unida al extremo de un hilo elástico, de longitud natural b y constante $k = 3mg/b$, cuyo otro extremo va unido al extremo B de una barra homogénea AB, de masa $2m$ y longitud $2b$, cuyo extremo A está fijo. El conjunto puede moverse en un plano vertical.



Se pide:

1. Ecuaciones generales de la dinámica del sistema y su linealización para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.
2. Frecuencias propias del sistema y modos normales de vibración.
3. Expresión de las coordenadas normales.

1.— El sistema tiene 3 g.d.l. para los que tomaremos el ángulo θ que forma la barra AB con la vertical descendente, el ángulo ϕ que forma el hilo elástico con la vertical descendente, y la longitud del hilo s. El sistema es conservativo y su energía potencial vale

$$V(\theta,\phi,s) = -2mgb\cos\theta - mg(2b\cos\theta + s\cos\phi) + \frac{1}{2}k(s-b)^2 \ , \tag{1}$$

de donde se deduce directamente la posición de equilibrio:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial\theta} = 4mgb\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0 = \frac{\partial V}{\partial\phi} = mgb\,\mathrm{sen}\,\phi,\ 0 = \frac{\partial V}{\partial s} = -mg\cos\phi + k(s-b)\,,$$
$$\Rightarrow \quad \theta = \phi = 0,\ s = \frac{4}{3}b\ . \tag{2}$$

Se comprueba que el equilibrio es estable mediante la matriz de derivadas segundas en dicho punto:

$$[\mathbf{K}] = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right] = \begin{pmatrix} 4mgb & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}mgb & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} > 0 \quad \text{(def. positiva)}\,. \tag{3}$$

La energía cinética vale

$$T = \frac{1}{2}\frac{1}{3}2m(2b)^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(s\dot\phi + 2b\dot\theta\cos(\phi-\theta)\right)^2 + \left(\dot s + 2b\dot\theta\,\mathrm{sen}(\phi-\theta)\right)^2\right]\ , \tag{4}$$

con lo que la Lagrangiana es

$$L = \frac{4}{3}mb^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\left[s^2\dot\phi^2 + 4b\dot\theta\left(s\dot\phi\cos(\phi-\theta) + \dot s\,\mathrm{sen}(\phi-\theta)\right) + 4b^2\dot\theta^2 + \dot s^2\right]$$
$$+ 4mgb\cos\theta + mgs\cos\phi - \frac{1}{2}k(s-b)^2\ . \tag{5}$$

CÁTEDRA DE MECÁNICA

Derivando ésta se obtienen las ecuaciones de Lagrange,

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{20}{3} m b^2 \ddot{\theta} + 2mbs\ddot{\phi}\cos(\phi-\theta) - 2mbs\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}(\phi-\theta) + 2mb\ddot{s}\operatorname{sen}(\phi-\theta) \\
&\qquad + 4mb\dot{s}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta) + 4mgb\operatorname{sen}\theta\,, && (6)\\
0 &= ms^2\ddot{\phi} + 2ms\dot{s}\dot{\phi} + 2mbs\ddot{\theta}\cos(\phi-\theta) + 2mbs\dot{\theta}^2\operatorname{sen}(\phi-\theta) + mgs\operatorname{sen}\phi\,, && (7)\\
0 &= 2mb\ddot{\theta}\operatorname{sen}(\phi-\theta) + m\ddot{s} - 2mb\dot{\theta}^2\cos(\phi-\theta) - ms\dot{\phi}^2 - mg\cos\phi + k(s-b)\,. && (8)
\end{aligned}
$$

Linealizando alrededor de la posición de equilibrio, para valores pequeños de $(\theta, \phi, \epsilon = s - 4b/3)$,

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{20}{3} m b^2 \ddot{\theta} + \frac{8}{3} m b^2 \ddot{\phi} + 4mgb\theta\,, \\
0 &= \frac{8}{3} m b^2 \ddot{\theta} + \frac{16}{9} m b^2 \ddot{\phi} + \frac{4}{3} mgb\phi\,, \\
0 &= m\ddot{\epsilon} + 3\frac{mg}{b}\epsilon\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Estas ecuaciones podrían haberse obtenido también de forma directa sin necesitar obtener las ecuaciones generales (6), (7) y (8). Para ello bastaría calcular las matrices de coeficientes mediante las derivadas segundas particularizadas en la posición de equilibrio $\boldsymbol{q}_0$. La matriz $[\mathbf{K}]$ ya ha sido obtenida en (3), mientras que la matriz de masa es

$$
[\mathbf{M}] = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right]_{\boldsymbol{q}_0} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} m b^2 & \frac{8}{3} m b^2 & 0 \\ \frac{8}{3} m b^2 & \frac{16}{9} m b^2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}\,; \tag{10}
$$

En función de estas matrices la ecuación diferencial correspondiente a (9) se expresa como

$$
[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \mathbf{0}\,. \tag{11}
$$

2.— Las frecuencias propias se obtienen como soluciones de la ecuación característica:

$$
0 = \det([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]) = \left(3\frac{mg}{b} - \omega^2 m\right)\left(\frac{128}{27}\omega^4 - 16\frac{g}{b}\omega^2 + \frac{16}{3}\left(\frac{g}{b}\right)^2\right)\,, \tag{12}
$$

$$
\Rightarrow \qquad \omega_1 = \sqrt{3\frac{g}{b}}; \quad \omega_2 = \sqrt{3\frac{g}{b}}; \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{3}{8}\frac{g}{b}}\,. \tag{13}
$$

Los modos normales asociados a cada frecuencia se obtienen mediante las expresiones

$$
([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}\} = \mathbf{0}\,, \tag{14}
$$

$$
\Rightarrow \qquad \{\mathbf{a}_1\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}; \quad \{\mathbf{a}_2\} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}; \quad \{\mathbf{a}_3\} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\,. \tag{15}
$$

(Los vectores propios no se han normalizado respecto a la matriz de masa, sino que se han seleccionado con el máximo elemento igual a la unidad.)

3.— Las coordenadas normales son las amplitudes de los modos, por lo que

$$
\begin{pmatrix} \theta & \phi & \epsilon \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = u_1\{\mathbf{a}_1\} + u_2\{\mathbf{a}_2\} + u_3\{\mathbf{a}_3\} \tag{16}
$$

Las relaciones que definen las coordenadas normales son por tanto

$$
\begin{cases} \theta = -\dfrac{1}{2}u_2 + \dfrac{2}{3}u_3 \\ \phi = u_2 + u_3 \\ \epsilon = u_1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} u_1 = \epsilon \\ u_2 = -\dfrac{6}{7}\theta + \dfrac{4}{7}\phi \\ u_3 = \dfrac{6}{7}\theta + \dfrac{3}{7}\phi \end{cases}. \tag{17}
$$

CÁTEDRA DE MECÁNICA