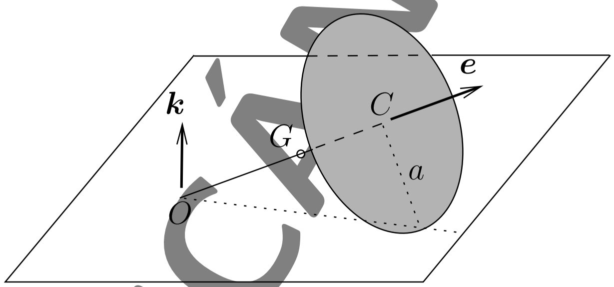
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (6 de septiembre de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un disco pesado, homogéneo de masa $m/2$ y radio a, tiene unida rígidamente y perpendicular a él una varilla OC de masa $m/2$ y longitud $a\sqrt{3}$ (ver figura). El sólido descrito rueda, pivota y desliza sobre un plano horizontal y liso, manteniéndose en todo momento en contacto con el mismo (tanto el extremo O de la varilla como el borde del disco apoyan siempre sobre el plano).

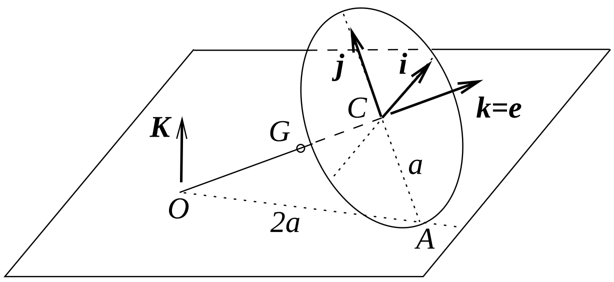


En el instante inicial se le comunica al sólido un movimiento tal que el centro de masas G tiene velocidad v_0 perpendicular a la varilla, y el vector velocidad angular vale: $\boldsymbol{\Omega}_0 = \omega_0(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{e})$, siendo $\boldsymbol{K}$ el versor vertical y $\boldsymbol{e}$ el versor según la varilla. Se pide:

1. Justificar adecuadamente si se cumple o no la constancia del momento cinético respecto de G, o respecto de alguna recta que pase por G;
2. Obtener las reacciones del plano sobre el sólido;
3. Relación entre v_0 y ω_0 para que O describa una cicloide, definiendo claramente dicha curva.

NOTA: Se denomina cicloide a la curva plana descrita por un punto de una circunferencia al rodar sin deslizar sobre una recta.

1.— El centro de masas G está situado a la distancia $a\sqrt{3}/4$ de C. El tensor central de inercia se obtiene sumando el de la varilla y el del disco, y tomando los ejes de la figura adjunta (la dirección $\boldsymbol{k}$ según el eje $\boldsymbol{e}$ de la varilla, $\boldsymbol{i}$ según el diámetro horizontal y $\boldsymbol{j}$ según la máxima pendiente), vale



$$[\boldsymbol{I}_G] = ma^2 \begin{pmatrix} 7/16 & 0 & 0 \\ 0 & 7/16 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Denominando (Ω_y, Ω_z) a las componentes de la velocidad de rotación del sólido según las direcciones anteriores (Ω_x es nula por la condición de apoyo), el momento cinético es

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{7}{16} ma^2 \Omega_y \, \boldsymbol{j} + \frac{1}{4} ma^2 \Omega_z \, \boldsymbol{k}. \qquad (2)$$

Las fuerzas sobre el sólido son su peso ($-mg\,\boldsymbol{K}$) aplicado en G y las reacciones de apoyo $N_O\,\boldsymbol{K}$, $N_A\,\boldsymbol{K}$. Todas llevan la dirección vertical, por lo que la proyección del momento cinético según esta dirección es constante. Además todas cortan al eje de la varilla, por lo que la proyección según esta otra dirección se conserva igualmente. Considerando que las componentes iniciales de la velocidad angular son $\boldsymbol{\Omega}_0 = \omega_0\,\boldsymbol{K} + \omega_0\,\boldsymbol{k} = \omega_0\frac{\sqrt{3}}{2}\,\boldsymbol{j} + \frac{3}{2}\omega_0\,\boldsymbol{k}$, resulta

$$H_Z = \boldsymbol{H}_G\cdot\boldsymbol{K} = \text{cte.} \quad\Rightarrow$$

$$\frac{7}{16}ma^2\Omega_y\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}ma^2\Omega_z\frac{1}{2} = \frac{7}{16}ma^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}ma^2\left(\frac{3}{2}\omega_0\right)\frac{1}{2} = \text{cte.} \tag{3}$$

$$H_z = \boldsymbol{H}_G\cdot\boldsymbol{k} = \text{cte.} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4}ma^2\Omega_z = \frac{1}{4}ma^2\left(\frac{3}{2}\omega_0\right) = \text{cte.} \tag{4}$$

De las ecuaciones (3) y (4) se deduce $\Omega_y = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0$, $\Omega_z = \frac{3}{2}\omega_0$ (constantes).

Por otra parte, observamos que la rotación puede expresarse asimismo como suma de precesión y rotación propia, que también serán constantes:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\psi\,\boldsymbol{K} + \dot\varphi\,\boldsymbol{k}\,, \quad \dot\psi = \dot\varphi = \omega_0\,. \tag{5}$$

2.— Las ecuaciones de la dinámica se obtienen derivando $\boldsymbol{H}_G$, lo que realizamos a través del sistema móvil definido por el triedro considerado. Tendremos en cuenta que la velocidad de rotación de esta referencia es $\dot\psi\,\boldsymbol{K} = \boldsymbol{\Omega} - \dot\varphi\,\boldsymbol{k}$ y que $(\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G/\mathrm{d}t)_{\text{rel}} = \boldsymbol{0}$, por lo que

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rel}} + \dot\psi\,\boldsymbol{K}\wedge\boldsymbol{H}_G = \frac{5\sqrt{3}}{64}ma^2\omega_0^2\,\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{M}_G &= \boldsymbol{r}_{GO}\wedge N_O\boldsymbol{K} + \boldsymbol{r}_{GA}\wedge N_A\boldsymbol{K} = \frac{9}{8}aN_O\boldsymbol{i} - \frac{7}{8}aN_A\boldsymbol{i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ 9N_O - 7N_A = \frac{5\sqrt{3}}{8}ma\omega_0^2\,. \tag{6}$$

Combinando esta ecuación con la del equilibrio de fuerzas verticales,

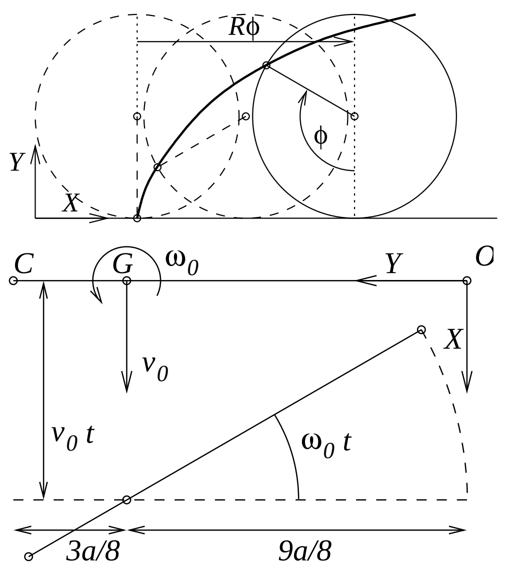
$$N_O + N_A = mg\,, \tag{7}$$

se obtienen las reacciones:

$$N_O = \frac{7}{16}mg + \frac{5\sqrt{3}}{128}ma\omega_0^2;\quad N_A = \frac{9}{16}mg - \frac{5\sqrt{3}}{128}ma\omega_0^2\,. \tag{8}$$

3.— La cicloide se obtiene como la trayectoria de un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar sobre una recta, como se describe en la figura. Las ecuaciones, tomando X según la recta e Y normal a la misma, son

$$X = R\phi - R\,\mathrm{sen}\,\phi;\quad Y = R - R\cos\phi\,. \tag{9}$$



Dibujando en planta la proyección del eje CGO, este segmento se traslada con velocidad constante v_0 (ya que no hay fuerzas horizontales), y gira con velocidad $\dot\psi = \omega_0$ también constante. Con los ejes de la figura las coordenadas del punto O serían

$$X_O = v_0t - \frac{9}{8}a\,\mathrm{sen}\,\omega_0t;\quad Y_O = \frac{9}{8}a - \frac{9}{8}a\cos\omega_0t \tag{10}$$

Puede verse que estas ecuaciones son equivalentes a las de la cicloide (9), considerando $\phi = \omega_0t$, $R = 9a/8$, siempre que se verifique la relación:

$$v_0 = \frac{9}{8}a\omega_0\,.$$

Otra manera de razonar habría sido observar que en la configuración inicial, para que O describa una cicloide, su velocidad debería ser nula, como corresponde al punto de rodadura del disco, por lo que $v_0 = \frac{9}{8}a\omega_0$, igual resultado.