Mecánica

EXAMEN PARCIAL (27 de noviembre de 2004)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

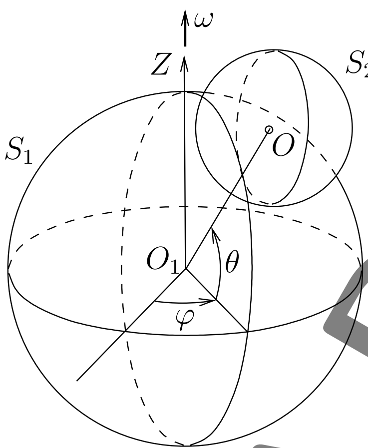
Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

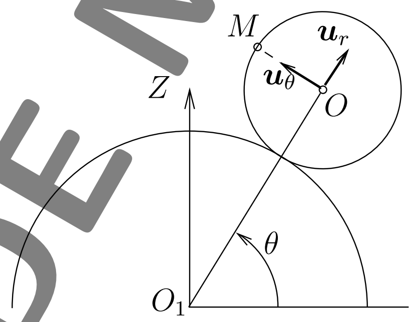
Una esfera S_1 de radio R gira alrededor del eje fijo O_1Z con velocidad de rotación ω constante. Además, otra esfera S_2 de radio a rueda y pivota sin deslizar sobre S_1, de forma que su centro O tiene una velocidad absoluta dada por la expresión:

$$\boldsymbol{v}_O = (R + a)\omega(\boldsymbol{u}_\theta + \cos\theta \boldsymbol{u}_\varphi)$$

siendo $\{\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\varphi, \boldsymbol{u}_\theta\}$ la base ortonormal física en O del sistema de coordenadas esféricas (r, φ, θ). Inicialmente $\theta = 0$ y $\varphi = 0$.

Por último, se sabe que el punto material de la esfera S_2 que en un instante genérico se encuentra en el punto M, definido por $\boldsymbol{OM} = a\boldsymbol{u}_\theta$, tiene una velocidad absoluta contenida en todo momento en el plano meridional definido por $\boldsymbol{u}_r$ y $\boldsymbol{u}_\theta$.





Corte por el plano meridiano O_1OZ

Se pide

1. Expresiones de la velocidad de rotación absoluta, velocidad de pivotamiento y de rodadura de la esfera S_2;
2. Expresión de la velocidad absoluta del punto material de S_2 que en un instante genérico pasa por M;
3. Expresión de la aceleración absoluta del centro O de la esfera S_2.

⋆

1.— Las coordenadas esféricas ($r = R + a, \varphi, \theta$) definen de forma absoluta la posición del centro de la esfera O. En primer lugar, observamos que la velocidad de O en función de estas coordenadas es $\boldsymbol{v}_O = (R + a)\dot{\varphi}\cos\theta\, \boldsymbol{u}_\varphi + (R + a)\dot{\theta}\, \boldsymbol{u}_\theta$, por lo que comparando con el dato del enunciado concluimos que ($\dot{\theta} = \omega$, $\dot{\varphi} = \omega$, $\theta = \omega t$, $\varphi = \omega t$).

Para obtener la velocidad de rotación impondremos las dos condiciones que definen el movimiento, en primer lugar la velocidad del punto de contacto N tiene que coincidir para ambas esferas, y en segundo lugar la velocidad del punto M debe estar en el plano meridiano.

La velocidad de N como perteneciente a ambas esferas es:

$$(\boldsymbol{v}_N)_{S_1} = \omega R \cos\theta \, \boldsymbol{u}_\varphi \,,$$
$$(\boldsymbol{v}_N)_{S_2} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge (-a \, \boldsymbol{u}_r) = [\omega(R+a) + \Omega_\varphi a] \, \boldsymbol{u}_\theta + [\omega(R+a)\cos\theta - \Omega_\theta a] \, \boldsymbol{u}_\varphi \,;$$

e igualando ambas se obtiene

$$\Omega_\varphi = -\omega\left(1 + \frac{R}{a}\right) \,; \qquad \Omega_\theta = \omega \cos\theta \,. \tag{1}$$

Por otra parte, la velocidad de M es

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge (a \, \boldsymbol{u}_\theta) = [\omega(R+a)\cos\theta - a\Omega_r] \, \boldsymbol{u}_\varphi + \omega(R+a)\boldsymbol{u}_\theta + a\Omega_\varphi \, \boldsymbol{u}_r \,; \tag{2}$$

imponiendo que la componente según $\boldsymbol{u}_\varphi$ sea nula,

$$\Omega_r = \omega\left(1 + \frac{R}{a}\right)\cos\theta \,. \tag{3}$$

Las ecuaciones (1) y (3) definen las componentes pedidas de la velocidad de rotación absoluta.

Las componentes de pivotamiento y rodadura se refieren al movimiento relativo, caracterizado por

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{\Omega} - \omega(\cos\theta \, \boldsymbol{u}_\theta + \operatorname{sen}\theta \, \boldsymbol{u}_r) = \omega\left[\left(1 + \frac{R}{a}\right)\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right]\boldsymbol{u}_r - \omega\left(1 + \frac{R}{a}\right)\boldsymbol{u}_\varphi \,.$$

Puesto que la normal común a ambas esferas en N es $\boldsymbol{u}_r$, las componentes pedidas son

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{piv}} = \omega\left[\left(1 + \frac{R}{a}\right)\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right]\boldsymbol{u}_r \,, \qquad \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{rod}} = -\omega\left(1 + \frac{R}{a}\right)\boldsymbol{u}_\varphi \,.$$

2.— La velocidad de M se obtuvo antes en (2), basta con sustituir los valores de las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ de (1) y (3):

$$\boldsymbol{v}_M = \omega(R+a)(\boldsymbol{u}_\theta - \boldsymbol{u}_r) \,. \tag{4}$$

3.— Si tenemos en cuenta la observación anterior de que el punto O se mueve según las coordenadas esféricas $r = (R+a)$ y $\dot\varphi = \dot\theta = \omega$, lo más sencillo será emplear las expresiones genéricas de la aceleración en estas coordenadas:

$$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\varphi^2\cos^2\theta = -(a+R)\omega^2(1+\cos^2\theta) \,;$$
$$a_\varphi = 2\dot r\dot\varphi\cos\theta - 2r\dot\theta\dot\varphi\operatorname{sen}\theta + r\ddot\varphi\cos\theta = -2(a+R)\omega^2\operatorname{sen}\theta \,;$$
$$a_\theta = 2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta + r\dot\varphi^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = (a+R)\omega^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \,,$$

es decir

$$\boldsymbol{a}_O = -(a+R)\omega^2(1+\cos^2\theta)\,\boldsymbol{u}_r - 2(a+R)\omega^2\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi + (a+R)\omega^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\boldsymbol{u}_\theta \,. \tag{5}$$

[Otra forma de proceder sería derivar directamente la expresión $\boldsymbol{v}_O = (R+a)\omega(\boldsymbol{u}_\theta + \cos\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi)$, teniendo en cuenta que $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\boldsymbol{u}_\varphi = \omega\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\theta - \omega\cos\theta\,\boldsymbol{u}_r$ y $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\boldsymbol{u}_\theta = -\omega\,\boldsymbol{u}_r - \omega\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi$, obteniéndose igual resultado.]