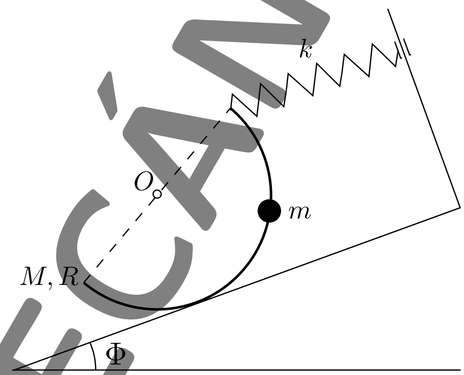
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (25 de enero de 2005)

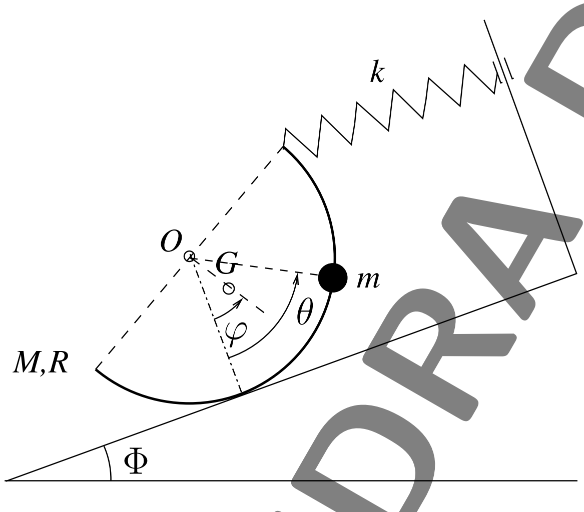
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

El sistema de la figura, contenido en un plano vertical fijo, está formado por un semiaro de centro O, masa M y radio R, y por una masa puntual m que se mueve por el semiaro con ligadura bilateral lisa. El semiaro rueda sin deslizar sobre un plano inclinado un ángulo Φ, y tiene en uno de sus extremos un muelle de longitud natural nula y constante k, que es paralelo en todo momento al plano inclinado. Se pide:



1. Expresar la función Lagrangiana del sistema mecánico descrito.
2. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento.
3. Razonar la existencia de integrales primeras del movimiento, y escribirlas en el caso de que existan.



1. Tomamos como grados de libertad los ángulos θ y φ de la figura, que definen de forma unívoca la configuración del sistema. Para obtener la función Lagrangiana es necesario obtener las expresiones de la energía cinética de la partícula y del semiaro así como la energía potencial de los pesos y del muelle.

La energía cinética de la partícula es:

$$T_{\text{part}} = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 - 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta) \qquad (1)$$

y la energía cinética del semiaro:

$$T_{\text{semiaro}} = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\varphi}^2 \qquad (2)$$

La velocidad del centro de masas del semiaro se puede expresar como:

$$v_G^2 = v_O^2 + |\boldsymbol{OG}|^2\dot{\varphi}^2 - 2v_O|\boldsymbol{OG}|\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad (3)$$

y teniendo en cuenta que $|\boldsymbol{OG}| = 2R/\pi$, resulta:

$$v_G^2 = R^2\left(\dot{\varphi}^2 + \frac{4}{\pi^2}\dot{\varphi}^2 - \frac{4}{\pi}\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) \qquad (4)$$

El momento de inercia del semiaro en G se obtiene a partir del teorema de Steiner:

$$I_G = MR^2\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) \qquad (5)$$

Sustituyendo estos resultados en (2) resulta finalmente:

$$T_{\text{semiaro}} = MR^2\dot{\varphi}^2(1 - \frac{2}{\pi}\cos\varphi) \tag{6}$$

Considerando como configuración de referencia la correspondiente al diámetro del semiaro paralelo al plano inclinado y alargamiento del muelle nulo, la energía potencial correspondiente a los pesos de la masa puntual y del semiaro, y al alargamiento del muelle es:

$$V_{\text{part}} = -mgR\varphi \operatorname{sen}\Phi - mgR\cos(\theta + \Phi) \tag{7}$$

$$V_{\text{semiaro}} = -MgR\varphi \operatorname{sen}\Phi - \frac{2R}{\pi}Mg\cos(\varphi + \Phi) \tag{8}$$

$$V_{\text{muelle}} = \frac{1}{2}kR^2(1 + \varphi - \cos\varphi)^2 \tag{9}$$

A partir de las ecuaciones (1), (6), (7), (8) y (9), se obtiene la función Lagrangiana $L = T - V$:

$$\begin{aligned} L = T - V = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 - 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta) + +MR^2\dot{\varphi}^2(1 - \frac{2}{\pi}\cos\varphi) + mgR\varphi \operatorname{sen}\Phi \\ + mgR\cos(\theta + \Phi) + MgR\varphi \operatorname{sen}\Phi + \frac{2R}{\pi}Mg\cos(\varphi + \Phi) - \frac{1}{2}kR^2(1 + \varphi - \cos\varphi)^2 \end{aligned} \tag{10}$$

2. Las ecuaciones de Lagrange se obtienen derivando en (10), y resultan:

$$\begin{aligned} \left[2M(1 - \frac{2}{\pi}\cos\varphi) + m\right] R^2\ddot{\varphi} - mR^2\ddot{\theta}\cos\theta + \frac{2}{\pi}MR^2\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\varphi + mR^2\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta \\ -MgR\operatorname{sen}\Phi + \frac{2}{\pi}MgR\operatorname{sen}(\varphi + \Phi) - mgR\operatorname{sen}\Phi + kR^2(1 + \varphi - \cos\varphi)(1 + \operatorname{sen}\varphi) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

$$mR^2\ddot{\theta} - mR^2\ddot{\varphi}\cos\theta + mgR\operatorname{sen}(\theta + \Phi) = 0 \tag{12}$$

3. Como todas las fuerzas que realizan trabajo derivan de un potencial, la conservación de la energía mecánica del sistema es una integral primera del movimiento:

$$\begin{aligned} T+V = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2-2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)+MR^2\dot{\varphi}^2(1-\frac{2}{\pi}\cos\varphi)-mgR\varphi\operatorname{sen}\Phi-mgR\cos(\theta+\Phi) \\ - MgR\varphi\operatorname{sen}\Phi - \frac{2R}{\pi}Mg\cos(\varphi + \Phi) + \frac{1}{2}kR^2(1 + \varphi - \cos\varphi)^2 = E \end{aligned} \tag{13}$$

Nótese que como la función Lagrangiana no depende explícitamente del tiempo y la energía cinética es una función homogénea de grado 2 en las velocidades generalizadas, la integral de Jacobi coincide con la energía total del sistema.