Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

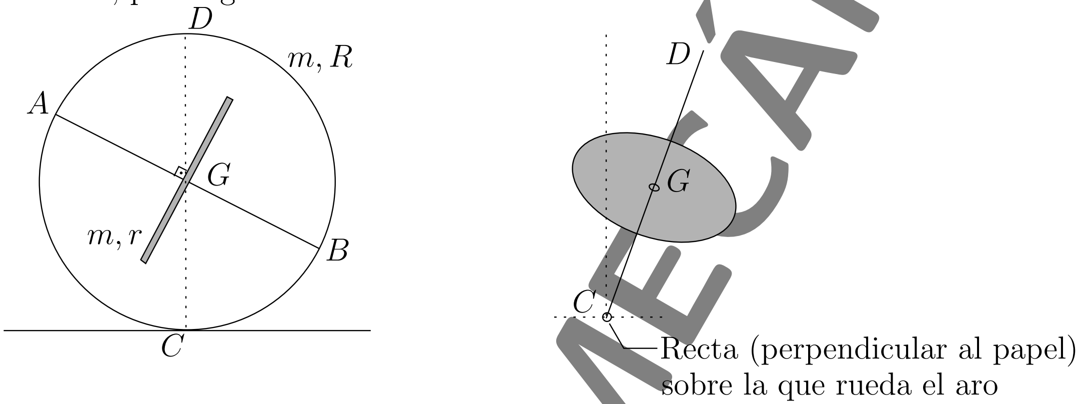
Mecánica

3$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (2 de Abril de 2005)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un aro pesado de masa m y radio R rueda sin deslizar sobre una recta horizontal fija. Este movimiento se produce de forma que, aunque el aro se mantiene coplanario con la recta sobre la que rueda, puede girar libremente alrededor de esta.



Vista del plano del aro (fuera de la vertical en una posición genérica) Vista lateral, según el canto del aro

El aro tiene una varilla, de masa despreciable, soldada según uno de sus diámetros AB. Esta varilla es el eje alrededor del cual puede girar libremente un disco pesado de masa m y radio $r < R$. Su centro G se encuentra en el punto medio del eje, y su plano siempre es perpendicular a dicho eje.

Se pide

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema completo, y seleccionar razonadamente un conjunto de parámetros que los representen adecuadamente;
2. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento del sistema;
3. Ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema;
4. Calcular el momento M que es necesario aplicar al aro para que su plano contenga en todo momento a la recta sobre la que rueda.

---

1. El sistema tiene tres grados de libertad, que podemos representar mediante el ángulo ψ asociado a la rodadura del aro, al ángulo θ que forma el aro con el plano vertical, y φ como el giro propio del disco alrededor de su eje AB. Las correspondientes velocidades de rotación, asociados a estos giros, se representan en la Figura 1.

2. Una integral primera del movimiento es la conservación según el eje AB del momento cinético del disco en G. Esto es debido a que el momento de las acciones externas al disco es nulo según el eje (el enunciado especifica que este movimiento es libre, y el peso está aplicado en su centro). Es importante observar que esta conclusión no es obvia, puesto que la dirección el eje AB es móvil, y si es cierta en este caso es por que el eje es de revolución del disco.

Otra integral primera es la conservación de la energía total, puesto que las fuerzas que trabajan son conservativas.

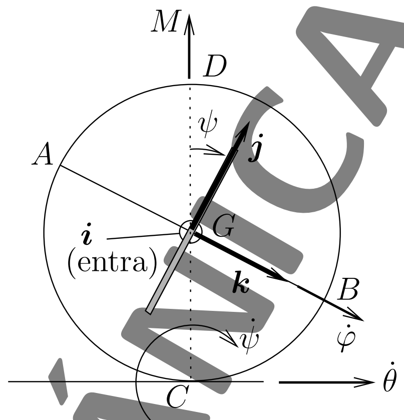


Figura 1: *Vista del plano del aro mostrando las distintas rotaciones presentes en el sistema.*

3. Las dos integrales primeras definidas en el apartado anterior proporcionan dos de las ecuaciones del movimiento del sistema.

Para obtener estas expresiones es necesario calcular las velocidades de rotación de aro y disco ($\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{\omega}$ respectivamente). Para ello empleamos un sistema móvil auxiliar $\{G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ ligado al aro (no participa de la rotación propia del disco, de forma que el versor $\boldsymbol{j}$ está contenido en el plano del aro, ver Figura 1), obteniendo:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{i} + \dot{\theta}(\operatorname{sen}\psi\boldsymbol{j} + \cos\psi\boldsymbol{k}) \quad , \qquad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$$

Teniendo en cuenta que:

$$(\boldsymbol{I}_G)_{\text{aro}} = mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad (\boldsymbol{I}_G)_{\text{disco}} = mr^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

se obtiene la expresión de la conservación del momento cinético en G del disco según $\boldsymbol{k}$:

$$(\boldsymbol{H}_G)_{\text{disco}} \cdot \boldsymbol{k} = [(\boldsymbol{I}_G)_{\text{disco}} \cdot \boldsymbol{\omega}] \cdot \boldsymbol{k} = cte. \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi} + \dot{\theta}\cos\psi = \omega_z = cte. \tag{1}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que el módulo de la velocidad del centro de masa del sistema es $v_G = R\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2}$, la expresión de la energía total del sistema, tomando como origen de potencial gravitatorio el plano horizontal que contiene a la recta sobre la que rueda el aro, resulta

$$\begin{aligned} E &= T + V = T_{\text{aro}} + T_{\text{disco}} + V \\ &= 2\frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot [(\boldsymbol{I}_G)_{\text{aro}} \cdot \boldsymbol{\Omega}] + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot [(\boldsymbol{I}_G)_{\text{disco}} \cdot \boldsymbol{\omega}] + 2mgR\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}mR^2\left(3\dot{\psi}^2 + \frac{5}{2}\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{8}mr^2\left(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2\operatorname{sen}^2\psi + 2\omega_z^2\right) + 2mgR\cos\theta = cte. \end{aligned} \tag{2}$$

Una manera de obtener la tercera ecuación del movimiento es mediante la correspondiente ecuación de Lagrange en ψ o θ (la de φ coincide con la ecuación (1) ya obtenida). Por ejemplo, la correspondiente a θ resulta, después de algunas operaciones:

$$\frac{5}{2}mR^2\ddot{\theta} + \frac{1}{4}mr^2\operatorname{sen}\psi\left(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\psi - 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\right) - 2mgR\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{3}$$

Otra forma de obtener una ecuación equivalente sería plantear el principio del momento cinético al conjunto en G. Siguiendo este procedimiento, el resultado más inmediato se obtiene planteándolo según $\boldsymbol{i}$, ya que el único momento según esta dirección es el producido por la fuerza de fricción F_r, que actúa según la recta sobre la que rueda el aro. Y esta fuerza se calcula de forma muy simple a través del plantemiento del principio de cantidad de movimiento al conjunto según la recta, que proporciona $F_r = 2mR\ddot{\psi}$.

Las expresiones (1), (2) y (3) son las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema.

4. El momento M se puede obtener planteando el principio del momento cinético en G al conjunto según la dirección CD, definida por el versor móvil $\boldsymbol{u} = \cos\psi\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\psi\boldsymbol{k}$:

$$\frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}_G \cdot \boldsymbol{u} = M \tag{4}$$

Teniendo en cuenta que el momento cinético del conjunto en G se calcula mediante la expresión:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_G &= (\boldsymbol{I}_G)_{\text{aro}} \cdot \boldsymbol{\Omega} + (\boldsymbol{I}_G)_{\text{disco}} \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= m\left(R^2 + \frac{1}{4}r^2\right)\dot{\psi}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}m\left(R^2 + \frac{1}{2}r^2\right)\dot{\theta}\operatorname{sen}\psi\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}\cos\psi + r^2\omega_z\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

y considerando además que podemos calcular el término izquierdo de la ecuación (4) de forma siguiente:

$$\frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} \cdot \boldsymbol{u} = \frac{d(\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{u})}{dt} - \boldsymbol{H}_G \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$

se obtiene, después de algunas operaciones:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{u} &= \frac{1}{2}mr^2\operatorname{sen}\psi\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}\cos\psi - \omega_z\right) \\ \frac{d(\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{u})}{dt} &= \frac{1}{4}mr^2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos 2\psi + \frac{1}{2}mr^2\cos\psi\left(\frac{1}{2}\ddot{\theta}\operatorname{sen}\psi - \dot{\psi}\omega_z\right) \\ \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} &= \left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u} = -\dot{\theta}\boldsymbol{i} \\ M &= mR^2\dot{\psi}\dot{\theta} + \frac{1}{4}mr^2\cos\psi\left(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\psi - 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

Una expresión equivalente podría haberse obtenido también por el procedimiento de añadir un grado libertad de giro α alrededor de $\boldsymbol{u}$, incorporando el momento activo M en la correspondiente ecuación de Lagrange e imponiendo en la ecuación diferencial resultante la condición $\alpha = 0$.