Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO DE FEBRERO (19 de Enero de 1996)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 1º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos, mientras que si se pide *expresar* no es necesaria la demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no deberá entregarse.

Enunciar el principio del momento cinético para un sistema general de n partículas, y discutir en la expresión resultante respecto de qué puntos es válido tomar momentos. (2.5 ptos.)

"El momento de las fuerzas exteriores de un sistema respecto de un punto fijo O es igual a la derivada respecto del tiempo del momento cinético del sistema respecto del mismo punto":

$$\boxed{\boldsymbol{M}_O = \frac{d}{dt}\boldsymbol{H}_O}$$

donde $\boldsymbol{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i^{ext}$, resultante de los momentos de las fuerzas exteriores, y $\boldsymbol{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge m_i \boldsymbol{v}_i$, momento cinético del sistema respecto de O.

Para poder aplicar esta ecuación O debe ser un punto fijo (respecto de un sistema de referencia inercial), o bien el centro de masas ($O \equiv G$). En cualquier otro caso no se cumple necesariamente la ecuación anterior (un ejemplo de esto último es un punto con velocidad nula pero con aceleración).

Enunciar El principio de Hamilton, y su generalización para el caso en que existan fuerzas no conservativas. Explicar la relación que guarda este principio con las ecuaciones de Lagrange. (2.5 ptos.)

"El movimiento de un sistema definido por una función Lagrangiana $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ entre dos instantes dados t_1 y t_2 es tal que la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

toma un valor estacionario (extremo) para el movimiento real $q_j(t)$."

Si no existe potencial, se puede generalizar esta expresión, tomando variaciones $\delta q_j(t)$ sin variar el tiempo ($\delta t = 0$), tales que $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + Q^j \delta q_j)\, dt = 0 \quad \forall \delta q_j.$$

Del principio de Hamilton se deducen las ecuaciones de Lagrange, mediante la aplicación del th. fundamental del cálculo de variaciones.

Para un oscilador lineal con amortiguamiento viscoso y sometido a una excitación armónica dada ($m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = q \operatorname{sen} \Omega t$), *justificar,* partiendo de la solución general del movimiento, porqué el movimiento en el régimen permanente no depende de las condiciones iniciales. (2.5 ptos.)

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las soluciones completas para dos conjuntos de condiciones iniciales distintas, $\{(x_1)_0, (\dot{x}_1)_0\}$, $\{(x_2)_0, (\dot{x}_2)_0\}$. Ambas deben cumplir la ecuación diferencial, por lo que

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 &= q \operatorname{sen} \Omega t, \\ m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 &= q \operatorname{sen} \Omega t. \end{aligned}$$

restando ambas expresiones, se obtiene que la diferencia $(x_1(t) - x_2(t))$ cumple la ecuación homogénea:

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + c(\dot{x}_1 - \ddot{x}_2) + k(x_1 - x_2) = 0.$$

Sabemos que la solución de esta ecuación homogénea es una función armónica afectada de una exponencial decreciente. Por lo tanto, al cabo de un tiempo suficiente ($t \to \infty$) la diferencia desaparece en la práctica ($(x_1 - x_2) \to 0$). Así, en el régimen permanente, ambas soluciones serán iguales, no dependiendo de las condiciones iniciales (c.q.d.).

Enunciar el principio de D'Alembert para un sistema general de N partículas. ¿Qué relación guarda este principio con las ecuaciones de Lagrange? (2.5 ptos.)

Sea un sistema sometido a enlaces lisos, con N partículas $\{m_i, i = 1, \cdots N\}$. Para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces, $\{\delta \boldsymbol{r}_i\}$, se cumple

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0}$$

siendo $\boldsymbol{f}_i$ las fuerzas *activas* (tanto externas como internas).

El principio de D'Alembert constituye una alternativa a los principios de Newton-Euler como base para el desarrollo de la dinámica. Si se expresa en función de coordenadas generalizadas libres ($q_j,\ i = 1, \dots n$) que definan de manera unívoca la configuración $\boldsymbol{r}_i(q_j, t)$, y admitiendo que todos los enlaces sean holónomos, se obtienen como consecuencia las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_j}\right) - \frac{dT}{dq_j} = Q_j; \quad j = 1 \dots n$$