Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO DE FEBRERO (19 de Enero de 1996)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 2º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos, mientras que si se pide *expresar* no es necesaria la demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no deberá entregarse.

Expresar las condiciones para la existencia y estabilidad del equilibrio en un sistema mecánico general en el que las fuerzas provienen de un potencial $V(q_j)$, siendo q_j las coordenadas generalizadas del sistema. (2.5 ptos.)

Existencia de Equilibrio

Existirá equilibrio en un punto $(q_j)_0$ si en ese punto V toma un valor extremal,

$$\left(Q^j\right)_0 = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)_0 = 0.$$

Estabilidad

Para que el equilibrio sea estable, el potencial V debe tener un mínimo local en ese punto. Para ello, la matriz Hessiana de V debe ser definida positiva:

$$\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0\right] > 0$$

(En la práctica se puede comprobar esta condición verificando que todos los menores principales > 0).

Para un sólido rígido de revolución, con un punto de su eje fijo y sometido únicamente a su propio peso, *expresar* las magnitudes cinéticas que se conservan en el movimiento. (2.5 ptos.)

Emplearemos la notación usual del triedro del cuerpo $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, triedro fijo $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$, ángulos de Euler (ψ, θ, φ) y momentos principales de inercia (A, A, C). El momento respecto del punto fijo O perteneciente al eje es $\boldsymbol{M}_O = Mgd\,\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{K}$. Se conservan las tres magnitudes siguientes:

1. Momento cinético proyectado sobre el eje vertical,

$$\boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = A\dot{\psi}\,\mathrm{sen}^2\theta + Cr\cos\theta \quad (= \text{cte.})$$

2. Momento cinético proyectado sobre el eje del cuerpo,

$$\boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{k} = Cr = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) \quad (= \text{cte.})$$

(por ser $\boldsymbol{k}$ móvil, esto sólo se verifica si el sólido es de revolución)

3. Energía total (al ser la fuerza de gravedad conservativa),

$$E = T + V = \frac{1}{2}(A\dot{\theta}^2 + A\dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}^2\theta + Cr^2) + Mgd\cos\theta \quad (= \text{cte.})$$

Definir, para un sistema lineal con n grados de libertad, el concepto de coordenadas normales y *explicar* su utilidad. (2.5 ptos.)

La solución general a las vibraciones libres sin amortiguamiento viene dada por una combinación lineal de modos normales, afectados de funciones armónicas:

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_{k=1}^{n} B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos(\omega_k t - \delta_k).$$

Se definen como coordenadas normales los coeficientes

$$u_k(t) = B_k \cos(\omega_k t - \delta_k) \qquad (k \text{ no sumado})$$

La expresión anterior define un cambio de coordenadas,

$$q_i(t) = a_{ki} u_k(t)$$

donde a_{ki} es la componente i del modo $\{\mathbf{a}_k\}$ y u_k son las llamadas coordenadas normales. En función de éstas las ecuaciones del movimiento resultan desacopladas,

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = 0, \qquad k = 1, \dots n \qquad (k \text{ no sumado})$$

Obtener las ecuaciones de Hamilton para una partícula libre de masa m, sometida a un potencial $V(x, y, z)$, siendo (x, y, z) las coordenadas cartesianas de la misma. (2.5 ptos.)

La Hamiltoniana es $H \stackrel{\text{def}}{=} p^i \dot{q}_i - L$, expresada en función de las nuevas variables (p^i, q_i, t); en nuestro caso los momentos generalizados son

$$p^x = m\dot{x}; \quad p^y = m\dot{y}; \quad p^z = m\dot{z}$$

y la expresión de H resulta, una vez eliminados $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$,

$$H(p^x, p^y, p^z, x, y, z) = \frac{1}{2m}\left[(p^x)^2 + (p^y)^2 + (p^z)^2\right] + V(x, y, z).$$

Las ecuaciones de Hamilton son por tanto

$$\frac{\partial H}{\partial p^i} = \dot{q}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{p^x}{m} = \dot{x}; \quad \frac{p^y}{m} = \dot{y}; \quad \frac{p^z}{m} = \dot{z}}$$

(ecuaciones que corresponden al cambio de variables que define p^i)

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}^i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial V}{\partial x} = -\dot{p}^x; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\dot{p}^y; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\dot{p}^z}$$

(ecuaciones que se corresponden con las de Newton de dinámica de la partícula).