Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

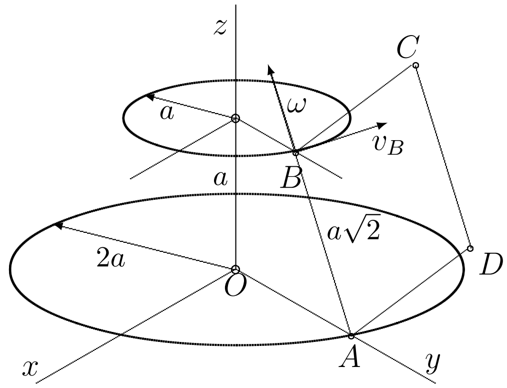
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO DE FEBRERO (19 de Enero de 1996)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 4º Tiempo: 45 min.

Una placa cuadrada $ABCD$ de lado $a\sqrt{2}$ se mueve de forma que dos vértices A y B describen sendas circunferencias paralelas con el mismo eje, de radios $2a$ y a respectivamente, situada esta última a una distancia a de la primera. La velocidad con que recorre el punto B la circunferencia superior es constante, y vale $v_B = a\omega$. Al tiempo, la placa gira alrededor del eje AB con velocidad angular ω.
Se pide:

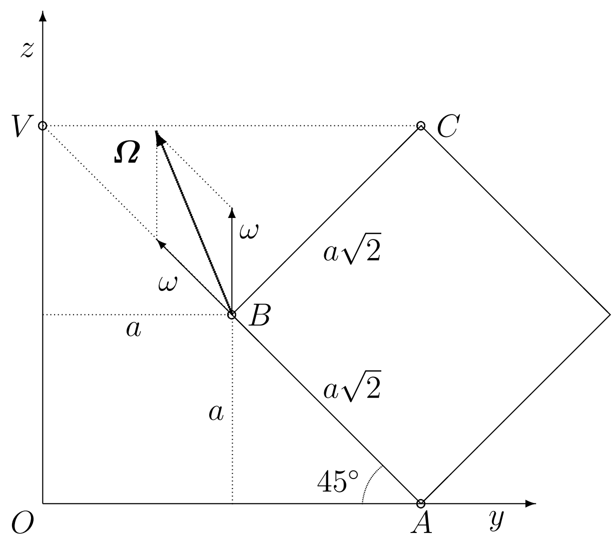


1. velocidad y aceleración angular de la placa;
2. definir el movimiento helicoidal tangente (eje y velocidad mínima);
3. en una posición en que B y C se hallen en el plano Oyz, obtener la aceleración del punto C .

Con el movimiento descrito el lado AB se mantiene en un plano vertical, que gira con velocidad ω alrededor del eje Oz, formando el segmento constantemente 45° con dicho eje.

1.- El movimiento queda definido como composición de dos rotaciones: una alrededor de Oz con velocidad ω, y otra relativa a ésta, alrededor de AB y con velocidad igualmente ω. Para expresar las componentes tomamos el eje Oy de forma que pase por A, es decir, AB contenida en el plano Oyz. La velocidad angular absoluta es la suma:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \omega\,\boldsymbol{k} + \omega\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}\right)\\ &= \omega\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\boldsymbol{k}\right);\end{aligned}$$



Es decir, la velocidad de rotación resultante tiene de módulo $\Omega = \omega\sqrt{2+\sqrt{2}}$ y forma $45°/2 = 22.5°$ con Oz.

A lo largo del movimiento, la velocidad angular se mantiene constante en relación al plano vertical OAB, girando éste con velocidad $\omega\,\boldsymbol{k}$ alrededor de Oz. La aceleración es por tanto

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega\,\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \frac{\omega^2}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i},$$

Es decir, lleva tiene de módulo $\omega^2/\sqrt{2}$ en dirección perpendicular al plano OAB.

2.- El movimiento conjunto, al ser composición de dos rotaciones cuyos ejes son coplanarios, es una rotación. El eje (paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$) forma 22.5° con Oz y pasa por el punto fijo V, situado sobre Oz con coordenada $z = 2a$. La velocidad mínima es obviamente nula, al ser una rotación. Los axoides son sendos conos con vértice en V, el fijo con eje de revolución Oz, y el móvil con eje AB.

3.- Se aplica la expresión general de la aceleración, a partir del punto V fijo:

$$\boldsymbol{a}_C = \underbrace{\boldsymbol{a}_V}_{=\boldsymbol{0}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{VC} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{VC})$$

teniendo en cuenta $\boldsymbol{VC} = 2a\,\boldsymbol{j}$ resulta finalmente

$$\boxed{\boldsymbol{a}_C = -\omega^2 a \left[(3 + 2\sqrt{2})\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\right].}$$