Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL (11 de junio del 2005)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Se considera un sistema conservativo con n grados de libertad sometido a pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio estable. *Expresar* las ecuaciones matriciales linealizadas de la dinámica y *definir* los conceptos de modos normales de vibración y de coordenadas normales. *Deducir* las expresiones de las ecuaciones de la dinámica para dichas coordenadas normales. (5 ptos.)

Tomando coordenadas libres $\{q_j, j = 1, \dots n\}$ y la posición de equilibrio estable en $q_j = 0$ (sin pérdida de generalidad), las ecuaciones de la dinámica pedidas son:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}\,, \tag{1}$$

siendo $\{\mathbf{q}\} = \{q_j\}$ el vector de coordenadas, $[\mathbf{M}] = [m_{ij}]$ la matriz de masa y $[\mathbf{K}] = [k_{ij}]$ la matriz de rigidez. Estas ecuaciones no incluyen términos de amortiguamiento ni vector de fuerzas puesto que el sistema es conservativo y en consecuencia todas las fuerzas provienen de un potencial $V(q_j)$ del que se deducen los términos de rigidez, $k_{ij} = \partial^2 V/\partial q_i \partial q_j|_{\mathbf{q}=0}$.

Las soluciones de la ecuación anterior son armónicas, del tipo $\{\mathbf{q}(t)\} = B\{\mathbf{a}\}\cos(\omega t - \delta)$, denominándose $\{\mathbf{a}\}$ y ω respectivamente *modo normal* y *frecuencia propia* de vibración. Los parámetros (B, δ) son constantes que se determinan según las condiciones iniciales del movimiento. Para calcular los modos normales se sustituye esta solución armónica en (1), obteniéndose $\omega^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\} - [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\}$, ecuación algebraica que define un problema de autovalores generalizado, cuyas n soluciones son los modos normales y frecuencias propias $(\{\mathbf{a}\}_k, \omega_k, k = 1, \dots n)$. Estos modos cumplen la propiedad de ortogonalidad respecto de la matriz de masas, $\{\mathbf{a}\}_i^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\}_j = 0$ si $\omega_i \neq \omega_j$.

La solución general es una combinación lineal del tipo $\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_{k=1}^{n} B_k\{\mathbf{a}\}_k \cos(\omega_k t - \delta_k)$, pudiendo interpretarse el movimiento resultante como la superposición de n modos $\{\mathbf{a}\}_k$ con amplitudes armónicas en función del tiempo, $u_k(t) = B_k\cos(\omega_k t - \delta_k)$. Estos coeficientes u_k se denominan *coordenadas normales.* En función de ellas y denominando a_{ki} la componente i del modo normal $\{\mathbf{a}\}_k$, la solución general anterior se expresa como $q_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}u_k$, que define un cambio de coordenadas entre q_i y u_k mediante la matriz de cambio $[\mathbf{A}] = [a_{ki}]$, en forma matricial $\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}\{\mathbf{u}\}$.

Expresando la ecuación (1) en función de las coordenadas normales, y premultiplicando por la matriz modal $[\mathbf{A}]$,

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}\,. \tag{2}$$

Teniendo en cuenta la ortogonalidad de los modos normales las matrices de coeficientes de esta ecuación resultan diagonales, obteniéndose en definitiva un conjunto de ecuaciones desacopladas de 1 g.d.l. para cada coordenada normal:

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = 0 \quad (k = 1, \dots n)\,. \tag{3}$$

Deducir la configuración de equilibrio que adopta un cable homogéneo, perfectamente flexible e inextensible, sometido a su peso propio. *Aplicación:* sea un cable de peso propio q por unidad de longitud, con extremos anclados a la misma altura y a distancia L, conociéndose la componente horizontal H de la reacción en dichos extremos. Obtener la flecha f del cable y la longitud S del mismo a partir de los datos anteriores. (5 ptos.)

Partiremos de las ecuaciones diferenciales de equilibrio del cable:

$$\boldsymbol{T} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}; \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{0}\,, \tag{4}$$

siendo $\boldsymbol{T}$ la tensión del cable, $\boldsymbol{q}$ las cargas distribuidas por unidad de longitud y $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ un elemento diferencial de longitud del mismo. La primera de las ecuaciones (4) se traduce en que la tensión es necesariamente tangente al cable, y la segunda puede considerarse propiamente como ecuación (vectorial) de equilibrio del mismo.

Si el cable es homogéneo y sometido a su propio peso, valdrá $\boldsymbol{q} = -q\,\boldsymbol{k}$, siendo $\boldsymbol{k}$ el versor vertical ascendente. Una primera consecuencia de (4) en este caso es que la curva de equilibrio estará en un plano vertical, que tomaremos definido por coordenadas x (horizontal) y z (vertical). La expresión en componentes de la tensión, en función del vector unitario tangente, es $\boldsymbol{T} = T\,\boldsymbol{t} = T\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}\right)$. Desarrollando las componentes de $(4)_2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = 0; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) = q. \tag{5}$$

De $(5)_1$ se deduce que la tensión horizontal es constante: $T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T_x = T_0 \quad$ (cte.). Teniendo esto en cuenta, podemos poner $T_z = T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = T_0\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = T_0\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, y desarrollando $(5)_2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T_0\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(T_0\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T_0\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{\sqrt{1+(\mathrm{d}z/\mathrm{d}x)^2}} = q.$$

Llamando $a \stackrel{\text{def}}{=} T_0/q$, $z' \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}z/\mathrm{d}x$, la ecuación anterior la podemos escribir como: $a\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}}\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x} = 1$, y mediante el cambio $z' = \operatorname{senh} u$ se integra fácilmente:

$$a \operatorname{argsenh} z' = x \quad \Rightarrow \quad z' = \operatorname{senh}\frac{x}{a}.$$

(al tomarse la constante de integración nula esto equivale a que $z' = 0$ para $x = 0$.) Integrando de nuevo la ecuación anterior resulta

$$\boxed{z = a\cosh\frac{x}{a} \quad \textit{(catenaria).}}$$

Aquí nuevamente se ha tomado constante de integración nula, que obliga a $z = a$ para $x = 0$. Por tanto, el origen de coordenadas xz se sitúa en un punto una distancia a por debajo del vértice de la catenaria ($z' = 0$).

Aplicación: La tensión horizontal es $T_0 = H$, y por tanto el parámetro de la catenaria vale $a = H/q$. La flecha se obtiene por diferencia de cotas entre el extremo y el centro:

$$\boxed{f = a\cosh\frac{L/2}{a} - a\,.}$$

La longitud de un elemento infinitesimal de cable es $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1+\operatorname{senh}^2(x/a)} = \mathrm{d}x\cosh(x/a)$. La longitud del cable entre el origen y un punto genérico x se obtiene integrando, $S = \int_0^x \cosh(\xi/a)\,\mathrm{d}\xi = a\operatorname{senh}(x/a)$. La longitud del cable completo es por tanto

$$\boxed{S = 2a\operatorname{senh}\frac{L/2}{a}\,.}$$