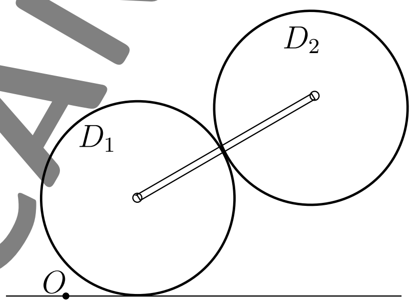
Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL (11 de junio del 2005)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

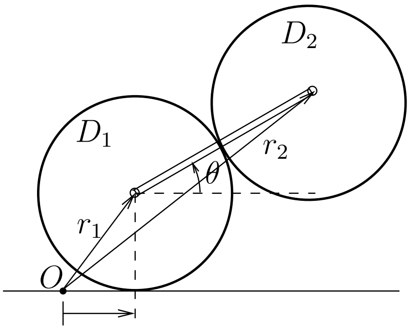


Un sistema mecánico está compuesto por dos discos pesados D_1 y D_2 iguales, de masa m y radio R cada uno, que pueden moverse en un plano vertical fijo.

El disco D_1 se apoya sobre una recta horizontal fija, mientras que el disco D_2 se mantiene en contacto con D_1. Existe una varilla rígida sin masa de longitud $2R$ que une los centros de los dos discos asegurando el enlace bilateral. Se supondrá que la recta horizontal no estorba el movimiento de D_2, que puede situarse en cualquier posición alrededor de D_1.

Por último, un cierto punto O de la recta repele a ambos discos con una fuerza cuya resultante es proporcional a la distancia al centro de cada disco, aplicada en dicho centro, con constante de proporcionalidad $k = mg/R$. Se pide

1. Calcular todas las posiciones de equilibrio del sistema.
2. Discutir la estabilidad de las posiciones de equilibrio en las que D_2 se encuentra por encima de la recta horizontal.



1.— El sistema tiene dos grados de libertad, para los que escogeremos las coordenadas libres $\{x, \theta\}$ definidas en la figura adjunta. En función de ellas las distancias de los centros de los discos al punto de repulsión O se pueden expresar como

$$\begin{aligned} r_1^2 &= x^2 + R^2 ; \\ r_2^2 &= (x + 2R\cos\theta)^2 + (R + 2R\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 \\ &= x^2 + 5R^2 + 4xR\cos\theta + 4R^2\,\mathrm{sen}\,\theta . \end{aligned}$$

El potencial de la fuerza repulsiva lineal es el correspondiente a un resorte de constante negativa, $V = -(1/2)kr^2$. El potencial total del sistema se obtiene como suma del gravitatorio más el de las fuerzas repulsivas:

$$V = mgz_1 + mgz_2 - \frac{1}{2}kr_1^2 - \frac{1}{2}kr_2^2 ;$$

operando y sustituyendo el valor de $k = mg/R$ resulta

$$V = -mgR - \frac{mg}{R}x^2 - 2mgx\cos\theta , \tag{1}$$

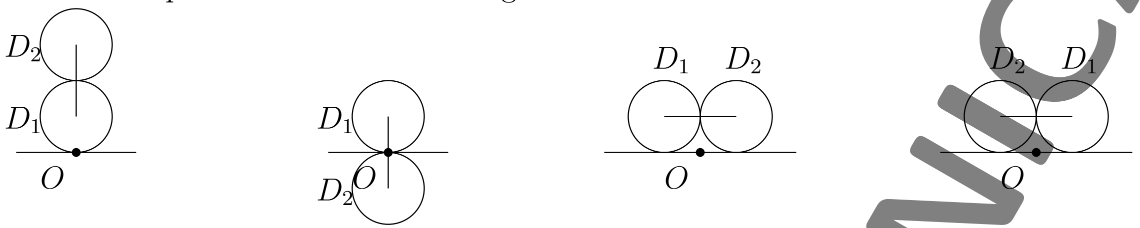
donde se ha medido la cota z a partir de la recta soporte.

Las posiciones de equilibrio corresponden a los extremos del potencial, es decir cuando su derivada se anule:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial x} = -2mg\left(\frac{x}{R} + \cos\theta\right) \tag{2}$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 2mgx\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{3}$$

Las soluciones de (3) son para $x = 0$ ó bien para $\theta = \{0, \pi\}$. En el primer caso, para cumplir la ecuación (2) debe ser $\theta = \pm\pi/2$. En el segundo debe ser respectivamente $x = \mp R$. En definitiva, las posiciones de equilibrio son las cuatro siguientes:



$x = 0, \theta = \pi/2$ $\qquad$ $x = 0, \theta = -\pi/2$ $\qquad$ $x = -R, \theta = 0$ $\qquad$ $x = R, \theta = \pi$

2.— De las posiciones de equilibrio, en la segunda D_2 está por debajo de la recta soporte, y la tercera y cuarta son simétricas y equivalentes desde el punto de vista mecánico, por lo que bastará con estudiar la primera y la tercera. Obtenemos en primer lugar las derivadas segundas del potencial:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2\frac{mg}{R}\,; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} = 2mg \operatorname{sen}\theta\,; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 2mgx\cos\theta\,,$$

Con lo cual la matriz de derivadas segundas (Hessiano) en las dos posiciones citadas resulta:

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{x=0,\theta=\pi/2} = \begin{pmatrix} -2\dfrac{mg}{R} & 2mg \\ 2mg & 0 \end{pmatrix} \not> 0 \qquad \textit{(inestable)}$$

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{x=-R,\theta=0} = \begin{pmatrix} -2\dfrac{mg}{R} & 0 \\ 0 & -2mgR \end{pmatrix} < 0 \quad \textit{(inestable)}$$

Ninguna de las dos es definida positiva, por lo que no corresponden a un mínimo de potencial y *el equilibrio no es estable en ningún caso.* (La primera tiene ambos menores principales negativos, y si se extraen los autovalores se comprueba que uno es negativo y el otro positivo, correspondiendo a un punto de ensilladura; la segunda tiene ambos autovalores negativos, siendo por tanto definida negativa y un máximo local de V.)