Mecánica

EXAMEN FINAL (11 de junio del 2005)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Definir el concepto de momento cinético para un sistema general de partículas y *enunciar* el principio que expresa el balance del mismo. *Aplicación:* partiendo de la expresión del momento cinético para un sólido rígido en su centro de masas $\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}$, siendo $\boldsymbol{I}_G$ el tensor central de inercia y $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad de rotación, deducir la ecuación de la dinámica que resulta del principio citado. (5 ptos.)

Sea un conjunto discreto de partículas $\{m_i, i = 1, \dots N\}$. Se considera un punto fijo O, siendo $\boldsymbol{r}_i$ el vector posición de cada partícula m_i. (*NOTA:* todo lo que sigue se desarrolla para un sistema discreto, aunque es igualmente válido para un sistema continuo con distribución de masa $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$, sustituyendo los sumatorios por integrales.) El *momento cinético* del sistema respecto de O se define como la suma de los correspondientes a cada partícula:

$$\boxed{\boldsymbol{H}_O = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge m_i \boldsymbol{v}_i \,.} \tag{1}$$

El *principio del momento cinético* establece que la derivada del mismo es igual al momento de las fuerzas:

$$\boxed{\boldsymbol{M}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{H}_O \,,} \tag{2}$$

siendo $\boldsymbol{M}_O = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i$, la resultante de momentos de todas las fuerzas sobre el sistema. Se comprueba que basta considerar las fuerzas externas, ya que las fuerzas internas (centrales) no dan momento neto. La ecuación de balance (2) sólo es válida en principio para un punto fijo respecto a la referencia inercial. Sin embargo, se comprueba que se cumple tembién para el centro de masas G del sistema, aunque este punto no sea fijo:

$$\boldsymbol{M}_G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{H}_G \,, \tag{3}$$

debiendo tomarse en esta expresión todos los momentos respecto a G, considerando el vector posición relativo $\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G$. Para el caso particular del sólido rígido el momento cinético se puede expresar como $\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}$, empleando el *tensor de inercia*: $\boldsymbol{I}_G = \sum_{i=1}^{N} \left((r'_i)^2 \boldsymbol{1} - \boldsymbol{r}'_i \otimes \boldsymbol{r}'_i \right) m_i$. El tensor de inercia caracteriza la geometría de masas del sólido y es invariante en un sistema de referencia ligado al mismo. Utilizamos esta propiedad para desarrollar la derivada del momento cinético en (3), derivando primero respecto de la referencia (móvil) del sólido y agregando el término complementario correspondiente:

$$\boldsymbol{M}_G = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) \right)_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) \,.} \tag{4}$$

Esta ecuación define la dinámica de rotación de un sólido rígido, y constituye la expresión vectorial de las *ecuaciones de Euler*.

Deducir la configuración de equilibrio que adopta un cable homogéneo, perfectamente flexible e inextensible, sometido a su peso propio. *Aplicación:* sea un cable de peso propio q por unidad de longitud, con extremos anclados a la misma altura y a distancia L, conociéndose la componente horizontal H de la reacción en dichos extremos. Obtener la flecha f del cable y la longitud S del mismo a partir de los datos anteriores. (5 ptos.)

Partiremos de las ecuaciones diferenciales de equilibrio del cable:

$$\boldsymbol{T} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}; \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{0}\,, \tag{5}$$

siendo $\boldsymbol{T}$ la tensión del cable, $\boldsymbol{q}$ las cargas distribuidas por unidad de longitud y $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ un elemento diferencial de longitud del mismo. La primera de las ecuaciones (5) se traduce en que la tensión es necesariamente tangente al cable, y la segunda puede considerarse propiamente como ecuación (vectorial) de equilibrio del mismo.

Si el cable es homogéneo y sometido a su propio peso, valdrá $\boldsymbol{q} = -q\,\boldsymbol{k}$, siendo $\boldsymbol{k}$ el versor vertical ascendente. Una primera consecuencia de (5) en este caso es que la curva de equilibrio estará en un plano vertical, que tomaremos definido por coordenadas x (horizontal) y z (vertical). La expresión en componentes de la tensión, en función del vector unitario tangente, es $\boldsymbol{T} = T\,\boldsymbol{t} = T\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}\right)$. Desarrollando las componentes de $(5)_2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = 0; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) = q. \tag{6}$$

De $(6)_1$ se deduce que la tensión horizontal es constante: $T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T_x = T_0 \quad$ (cte.). Teniendo esto en cuenta, podemos poner $T_z = T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = T_0\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = T_0\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, y desarrollando $(6)_2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T_0\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(T_0\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T_0\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{\sqrt{1+(\mathrm{d}z/\mathrm{d}x)^2}} = q.$$

Llamando $a \stackrel{\text{def}}{=} T_0/q$, $z' \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}z/\mathrm{d}x$, la ecuación anterior la podemos escribir como: $a\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}}\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x} = 1$, y mediante el cambio $z' = \operatorname{senh} u$ se integra fácilmente:

$$a \operatorname{argsenh} z' = x \quad \Rightarrow \quad z' = \operatorname{senh}\frac{x}{a}.$$

(al tomarse la constante de integración nula esto equivale a que $z' = 0$ para $x = 0$.) Integrando de nuevo la ecuación anterior resulta

$$\boxed{z = a\cosh\frac{x}{a} \quad \textit{(catenaria)}.}$$

Aquí nuevamente se ha tomado constante de integración nula, que obliga a $z = a$ para $x = 0$. Por tanto, el origen de coordenadas xz se sitúa en un punto una distancia a por debajo del vértice de la catenaria ($z' = 0$).

Aplicación: La tensión horizontal es $T_0 = H$, y por tanto el parámetro de la catenaria vale $a = H/q$. La flecha se obtiene por diferencia de cotas entre el extremo y el centro:

$$\boxed{f = a\cosh\frac{L/2}{a} - a\,.}$$

La longitud de un elemento infinitesimal de cable es $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1+\operatorname{senh}^2(x/a)} = \mathrm{d}x\cosh(x/a)$. La longitud del cable entre el origen y un punto genérico x se obtiene integrando, $S = \int_0^x \cosh(\xi/a)\,\mathrm{d}\xi = a\operatorname{senh}(x/a)$. La longitud del cable completo es por tanto

$$\boxed{S = 2a\operatorname{senh}\frac{L/2}{a}\,.}$$