

# Mecánica

EXAMEN FINAL (11 de junio del 2005)

Apellidos

Nombre

N.º

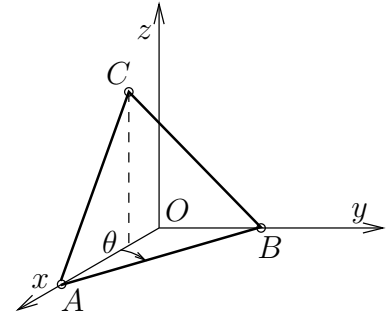
Grupo

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|--|--|--|

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/45)

Tiempo: 60 min.

Se considera un triángulo equilátero  $ABC$  de lado  $a$ , cuyos vértices  $A$  y  $B$  están obligados a permanecer sobre los ejes  $Ox$  y  $Oy$  respectivamente, mientras que el vértice  $C$  se mantiene dentro del plano  $Oxz$ . El vértice  $A$  se ve sometido a un movimiento impuesto de forma que el ángulo  $\theta$  que forma  $AB$  con el eje  $Ox^-$  tiene velocidad constante  $\dot{\theta} = \omega_0$ . Se pide:



1. Caracterizar el movimiento del triángulo, calculando la velocidad instantánea de rotación en una configuración genérica. Discutir si el movimiento equivale o no a una rotación instantánea, obteniendo la velocidad mínima o velocidad de deslizamiento de los puntos del plano móvil.
2. Calcular a) la aceleración angular del sólido, b) las velocidades de los puntos  $A$  y  $C$  y c) la aceleración del punto  $A$ .

1.— El movimiento del triángulo puede caracterizarse como composición de dos rotaciones. En primer lugar, el giro  $\theta$  de  $AB$  en el plano  $Oxy$ , alrededor de un eje vertical por el punto  $I$  (figura adjunta). Por otra parte, la rotación  $\varphi$  alrededor del eje  $AB$ , que sirve para que el vértice  $C$  se mantenga sobre el plano  $Oxz$ .

Existe una relación entre los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  que puede obtenerse considerando el segmento  $C'M$  ( $M$ : punto medio de  $AB$ ) en los triángulos rectángulos  $AMC'$  y  $CC'M$ :

$$\overline{MC'} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \theta = a \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \varphi \Rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{tg} \theta. \quad (1)$$

Derivando esta expresión se obtiene la relación entre las velocidades,

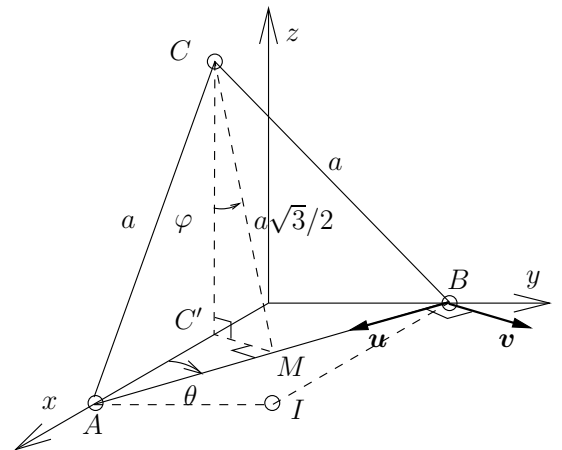
$$\dot{\varphi} = \dot{\theta} \frac{1/\cos^2 \theta}{\sqrt{3} \cos \varphi} = \dot{\theta} \frac{1/\cos^2 \theta}{\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 \theta}} = \dot{\theta} \frac{1/\cos \theta}{\sqrt{4 \cos^2 \theta - 1}}. \quad (2)$$

La velocidad angular resulta pues

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\theta} \mathbf{k} + \dot{\varphi} \mathbf{u},$$

en función del vector unitario auxiliar  $\mathbf{u}$  definido en la figura anterior.

Los ejes de las dos rotaciones se cruzan en el espacio (recta vertical por  $I$  y recta  $AB$ ), por lo que el movimiento conjunto no es una rotación instantánea, sino que se trata de un movimiento helicoidal general con deslizamiento. La velocidad de deslizamiento puede calcularse



proyectando la de un punto cualquiera sobre la velocidad de rotación. Empleando para ello el punto  $A$  y considerando el resultado (2) se obtiene:

$$\mathbf{v}_A \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} = -a\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \mathbf{i} \cdot \frac{-\dot{\theta} \mathbf{k} + \dot{\varphi} \mathbf{u}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2}} = -a\dot{\theta} \frac{\dot{\varphi} \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2}} = -a\dot{\theta} \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 1)}}.$$

2.— La aceleración angular se calcula derivando  $\boldsymbol{\Omega}$ ,

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = -\ddot{\theta} \mathbf{k} + \ddot{\varphi} \mathbf{u} + \dot{\varphi} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \ddot{\varphi} \mathbf{u} - \dot{\varphi} \dot{\theta} \mathbf{v},$$

donde se ha considerado  $d\mathbf{u}/dt = -\dot{\theta} \mathbf{k} \wedge \mathbf{u} = -\dot{\theta} \mathbf{v}$ , siendo  $\mathbf{v}$  el vector unitario auxiliar definido en la figura anterior. Sustituyendo la expresión (2) y operando se obtiene finalmente

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \frac{\dot{\theta}^2}{\sqrt{4 \cos^2 \theta - 1}} \left( \frac{\operatorname{sen} \theta (8 \cos^2 \theta - 1)}{\cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 1)} \mathbf{u} - \frac{1}{\cos \theta} \mathbf{v} \right). \quad (3)$$

La velocidad de  $A$  ya se obtuvo arriba,

$$\mathbf{v}_A = -a\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \mathbf{i}. \quad (4)$$

La velocidad de  $C$  se obtiene desarrollando el campo de velocidades,

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_{AC};$$

considerando  $\mathbf{r}_{AC} = -\frac{a}{2} \frac{1}{\cos \theta} \mathbf{i} + a \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \mathbf{k}$  junto con las expresiones (2) y (1) y operando se obtiene

$$\mathbf{v}_C = -a\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \left( 1 + \frac{1}{2 \cos^2 \theta} \right) \mathbf{i} - \frac{a}{2} \dot{\theta} \frac{\operatorname{sen} \theta / \cos^2 \theta}{\sqrt{4 \cos^2 \theta - 1}} \mathbf{k}. \quad (5)$$

Por último, la aceleración de  $A$  se obtiene derivando de nuevo (4):

$$\mathbf{a}_A = -a\dot{\theta}^2 \cos \theta \mathbf{i}. \quad (6)$$