Mecánica

EXAMEN FINAL (11 de junio del 2005)

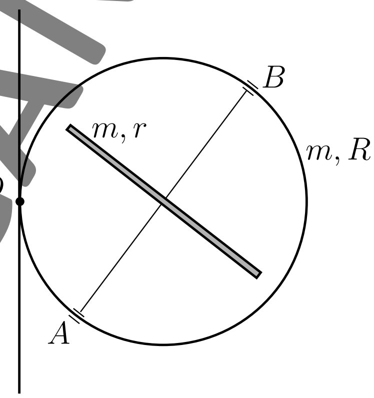
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un sistema mecánico está compuesto de un aro de masa m y radio R y un disco de masa m y radio $r < R$.

El aro tiene un punto fijo O y puede girar libremente alrededor de una recta vertical fija que pasa por O, manteniéndose siempre vertical.

El disco está unido perpendicularmente al punto medio de una varilla sin masa AB de longitud $2R$, de forma que puede girar libremente alrededor de ésta. Además, los extremos de la varilla pueden deslizar sin rozamiento sobre el aro, como muestra la figura adjunta. Se pide

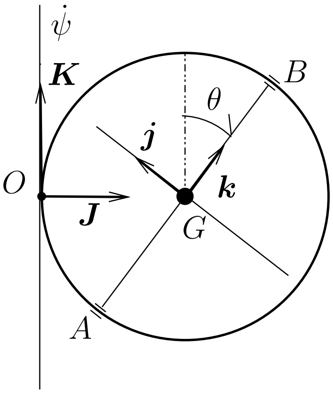


1. Determinar el número de grados de libertad del sistema, justificando la elección de un conjunto adecuado de parámetros que los representen.

2. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento, obteniendo las expresiones correspondientes caso de que existan.

3. Calcular el momento M que habría que ejercer sobre el aro para conseguir que su velocidad de rotación alrededor del eje vertical fuera constante.

1.— El sistema está constituido por dos sólidos rígidos. El aro posee un único grado de libertad que corresponde a la rotación ψ alrededor de la recta vertical. El disco tiene dos grados de libertad adicionales, el ángulo θ que forma la recta AB con la vertical y la rotación φ alrededor del eje del disco. El sistema posee, por tanto, tres grados de libertad.



2.— Las únicas fuerzas exteriores que trabajan sobre el sistema son los pesos del aro y del disco. Se verifica la existencia de las siguientes integrales primeras:

1. Conservación de la componente vertical del momento cinético del sistema en O. Existe un momento reactivo en O, pero es horizontal: $\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = H$

2. Conservación de la componente AB del momento cinético del disco G, dado que no existe momentos sobre el disco en dicha dirección y se trata del eje de revolución: $\boldsymbol{H}_G^d \cdot \boldsymbol{k} = h$

3. Conservación de la energía total del sistema ya que los pesos, que son las únicas fuerzas que trabajan, son conservativas : $E = T + V$

Se adopta un sistema móvil, de acuerdo con la figura, con origen en el centro del disco G, de forma que el versor $\boldsymbol{k}$ tiene la dirección del eje de revolución y el versor $\boldsymbol{i}$ es el correspondiente a un diámetro horizontal. La velocidad angular del aro, $\boldsymbol{\Omega}_a$, y del disco, $\boldsymbol{\Omega}_d$, expresadas en función de los grados de libertad son, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega}_a &= \dot{\psi}\boldsymbol{K} = \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} + \dot{\psi}\cos\theta\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{\Omega}_d &= \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} + \dot{\psi}\boldsymbol{K} = \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

El momento cinético del sistema respecto a O es suma del del aro y el del disco:

$$\boldsymbol{H}_O = \underbrace{\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}_a}_{\boldsymbol{H}_O^a} + \underbrace{\boldsymbol{H}_G^d + \boldsymbol{r}_{OG} \wedge m\boldsymbol{v}_{Gd}}_{\boldsymbol{H}_O^d}$$

y sabiendo que $\boldsymbol{v}_{Gd} = R\dot{\psi}\boldsymbol{i}$, resulta:

$$\boldsymbol{H}_O = \frac{3}{2}mR^2\dot{\psi}\,\boldsymbol{K} + \underbrace{\frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{i} + \frac{1}{4}mr^2\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}mr^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{H}_G^d} + mR^2\dot{\psi}\boldsymbol{K}$$

$$H = \boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = \frac{5}{2}mR^2\dot{\psi} + \frac{1}{4}mr^2\dot{\psi}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{2}mr^2\cos\theta(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) \tag{1}$$

$$h = \boldsymbol{H}_G^d \cdot \boldsymbol{k} = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) \tag{2}$$

De la ecuación (2) se deduce que $\Omega_{zd} = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$ es una constante, por lo que se puede eliminar la variable $\dot{\varphi}$ de la ecuación (1), resultando finalmente:

$$\boxed{H = \frac{5}{2}mR^2\dot{\psi} + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{1}{2}\dot{\psi}\operatorname{sen}^2\theta + \Omega_{zd}\cos\theta\right)}$$

La ecuación de conservación de la energía se reduce, en este caso, a la conservación de la energía cinética del sistema: $E = T_a + T_d = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}mv_{Gd}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{H}_G^d \cdot \boldsymbol{\Omega}_d$

$$\boxed{E = \frac{5}{4}mR^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{8}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}mr^2\dot{\psi}^2\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{4}mr^2\Omega_{zd}^2} \tag{3}$$

Se puede comprobar que las dos primeras integrales primeras se podrían haber obtenido igualmente a partir de las ecuaciones de Lagrange, observando que ψ y φ son coordenadas cíclicas.

3.— En el apartado anterior se consideraba la rotación ψ libre alrededor de la recta vertical, y en consecuencia se conservaba el momento cinético respecto de dicha recta (1). En este apartado se considera por el contrario que se impone una velocidad de rotación fija $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$, en cuyo caso no se conservará dicho momento cinético ($H \neq$ cte.), y será necesario imponer un momento M para controlar dicha velocidad de rotación. Su valor se deduce a partir de la ecuación de balance del momento cinético:

$$M = \frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt} \cdot \boldsymbol{K} = \frac{d(\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K})}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta(\dot{\psi}_0\cos\theta - \Omega_{zd})$$