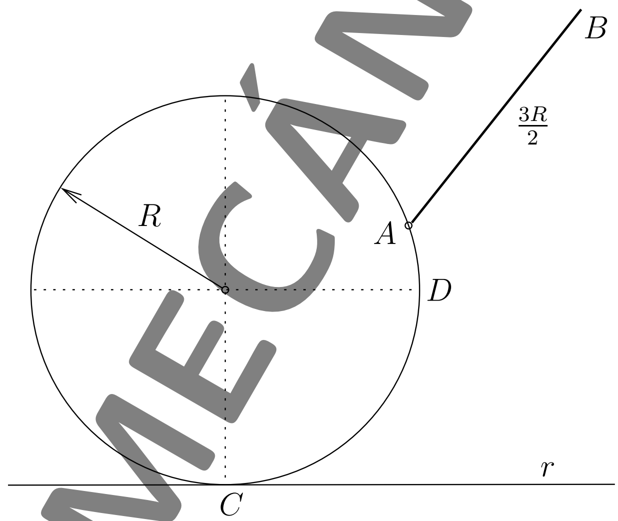
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (5 de septiembre del 2005)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Una varilla AB pesada de masa m y longitud $3R/2$ se mueve contenida en todo momento en un plano vertical fijo, de forma que su extremo A puede deslizar sobre una circunferencia fija de radio R en el mismo plano con ligadura bilateral lisa. Además del peso, actúa sobre la varilla una fuerza repulsiva distribuida proporcional a la masa y a la distancia que separa cada punto de la recta horizontal fija r. Llamando y a dicha distancia, para cada elemento de masa esta fuerza vale $\mathrm{d}f = ky\,\mathrm{d}m$, siendo la constante $k = \dfrac{2g}{3R}$.

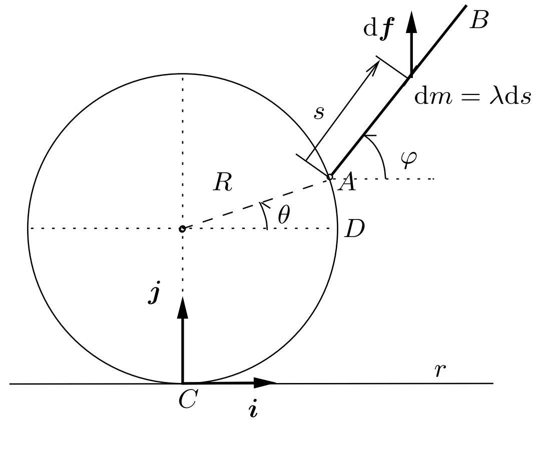


Se pide:

1. Obtener todas las posiciones de equilibrio de la varilla;
2. Discutir la estabilidad de las posiciones de equilibrio en las que A se encuentra en algún punto perteneciente al cuadrante inferior derecho (arco CD) de la circunferencia.

---

1. El sistema posee dos grados de libertad definidos por los ángulos θ y φ, tal y como se muestra en la figura. Las fuerzas activas actuantes, el peso y la fuerza repulsiva, derivan de potencial. El potencial de la fuerza repulsiva elemental (es decir, correspondiente a un elemento $\mathrm{d}m$) vale en este caso:



$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = ky\,\mathrm{d}m\boldsymbol{j} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}V_f = -k\frac{y^2}{2}\mathrm{d}m\,;$$

sabiendo que $y = R(1+\operatorname{sen}\theta) + s\operatorname{sen}\varphi$ y que $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}s$, siendo λ la densidad másica lineal, el potencial de la varilla resulta:

$$\begin{aligned} V_f &= \int_0^{3R/2} -\frac{k}{2}[R(1+\operatorname{sen}\theta) + s\operatorname{sen}\varphi]^2\lambda \mathrm{d}s \\ &= -mgR\left[\frac{1}{3}(1+\operatorname{sen}\theta)^2 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi(1+\operatorname{sen}\theta)\right]. \end{aligned}$$

Por otra parte, el potencial del peso vale

$$V_p = mgy_G = mgR\left[(1+\operatorname{sen}\theta) + \frac{3}{4}\operatorname{sen}\varphi\right],$$

de forma que el potencial total es, finalmente:

$$\boxed{V = mgR\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta(1-\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\varphi(1-\operatorname{sen}\varphi) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\right].} \tag{1}$$

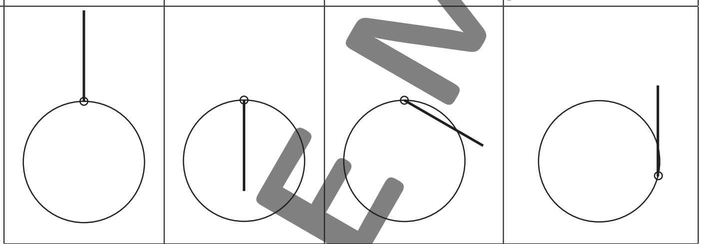
Las condiciones de equilibrio se pueden deducir imponiendo la anulación de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \cos\theta\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi\right] = 0 \tag{2}$$

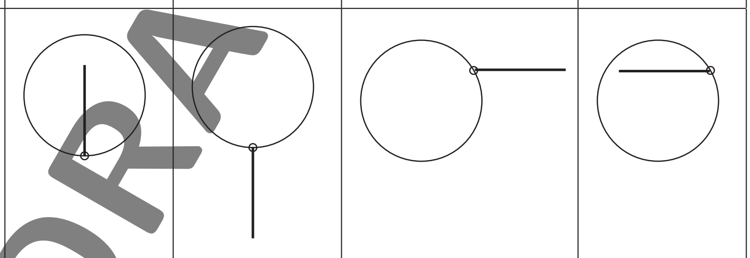
$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \cos\varphi\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right] = 0\,. \tag{3}$$

Las posiciones de equilibrio que se obtienen como solución de estas ecuaciones se pueden resumir en el cuadro 1, en el que por simplicidad no se han indicado las posiciones simétricas respecto al eje vertical que pasa por el centro de la circunferencia.

caso	1	2	3	4
θ	$\pi/2$			$\operatorname{arc\,sen}(-\frac{1}{4})$
φ	$\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/6$	$\frac{\pi}{2}$



caso	5	6	7	8
θ	-$\pi/2$		$\pi/6$	
φ	$\pi/2$	$-\pi/2$	0	π



Cuadro 1: *Cuadro de soluciones para las posiciones de equilibrio*

Otro método más intuitivo para obtener las posiciones de equilibrio sería expresar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos sobre la varilla. Las fuerzas actuantes son la reacción N del aro, el peso $-mg\,\boldsymbol{j}$ y la fuerza repulsiva $\boldsymbol{f} = \left(\int ky\,\mathrm{d}m\right)\boldsymbol{j} = ky_G m\,\boldsymbol{j}$. Teniendo en cuenta que estas últimas dos fuerzas son verticales, se deduce que las únicas posiciones de equilibrio posibles son aquellas en que la reacción de la circunferencia es igualmente vertical ($\theta = \pm\pi/2$), o bien en otras posiciones θ en las que sea $N = 0$. Para obtener las posiciones debemos verificar también que la suma de momentos sea nula.

Así, considerando las posiciones $\theta = \pm\pi/2$, un primer grupo de soluciones son aquellas en las que a su vez $\varphi = \pm\pi/2$, ya que todas las fuerzas están contenidas en el mismo eje vertical y no dan momentos. Esto da lugar a las soluciones $\{1, 2, 5, 6\}$ del cuadro 1.

Otro grupo de soluciones las obtenemos para los casos en que $N = 0$, por lo que la fuerza repulsiva debe equilibrar al peso, es decir $ky_Gm = mg$. Considerando $y_G = R(1 + \operatorname{sen}\theta) + (3R/4)\operatorname{sen}\varphi$, se obtiene

$$\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{4}\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2}.$$

Debemos garantizar además que los momentos sean nulos, para lo cual hay que considerar que al tener la fuerza repulsiva una variación lineal con y su efecto no corresponde en general a la resultante aplicada en el centro de la varilla sino en un punto distinto. Para que se anule el momento en este caso debe cumplirse $\varphi = \{0, \pi, \pm\pi/2\}$. Si $\varphi = \{0, \pi\}$ (varilla horizontal) se deduce $\theta = \pi/6$, posiciones $\{7, 8\}$ del cuadro 1. Por otra parte, si $\varphi = \pi/2$ será $\theta = \operatorname{arc\,sen}(-1/4)$ (posición 4), no existiendo solución para $\varphi = -\pi/2$.

Un último grupo de posiciones de equilibrio se obtienen siendo $N \neq 0$ (pero vertical, es decir en $\theta = \pm\pi/2$) y con la varilla fuera de la vertical, exigiendo que el momento en el extremo A de la varilla se anule. El momento ($\circlearrowleft$) debido a la fuerza repulsiva es

$$(M_A)_f = \int_0^\ell k\lambda \underbrace{(y_A + s\operatorname{sen}\varphi)}_{y(s)} s\cos\varphi \,\mathrm{d}s = km\frac{\ell}{2}\cos\varphi\left(y_A + \frac{2}{3}\ell\operatorname{sen}\varphi\right).$$

Sustituyendo $k = 2g/(3R)$, $\ell = 3R/2$, $y_A = R(1 + \operatorname{sen}\theta)$ y agregando el momento del peso $(M_A)_p = -mg(\ell/2)\cos\varphi$, el momento resultante vale

$$M_A = mgR\cos\varphi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi\right).$$

Observamos que esta ecuación es la misma que la obtenida anteriormente (3) a partir de $\partial V/\partial\varphi$. Considerando en esta ecuación $\theta = \pi/2$ se obtiene como solución $\varphi = -\pi/6$ (solución 3 del cuadro 1). Sin embargo, para $\theta = -\pi/2$ no se obtiene solución.

2. Las posiciones de equilibrio situadas en el cuadrante inferior derecho son las $\{4, 5, 6\}$ del cuadro 1. Para discutir la estabilidad calculamos las derivadas segundas del potencial:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} &= -\operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi\right) - \frac{2}{3}\cos^2\theta\\
\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial\varphi} &= -\frac{1}{2}\cos\varphi\cos\theta\\
\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} &= -\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right) - \frac{1}{2}\cos^2\varphi
\end{aligned}$$

Particularizando en las posiciones de equilibrio:

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right]_{(\theta_4,\varphi_4)} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & 0\\ 0 & \frac{1}{8}\end{pmatrix} \quad \text{(inestable)}$$

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right]_{(\theta_5,\varphi_5)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix} \quad \text{(inestable)}$$

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right]_{(\theta_6,\varphi_6)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{5}{4}\end{pmatrix} \quad \text{(estable)}$$