Mecánica

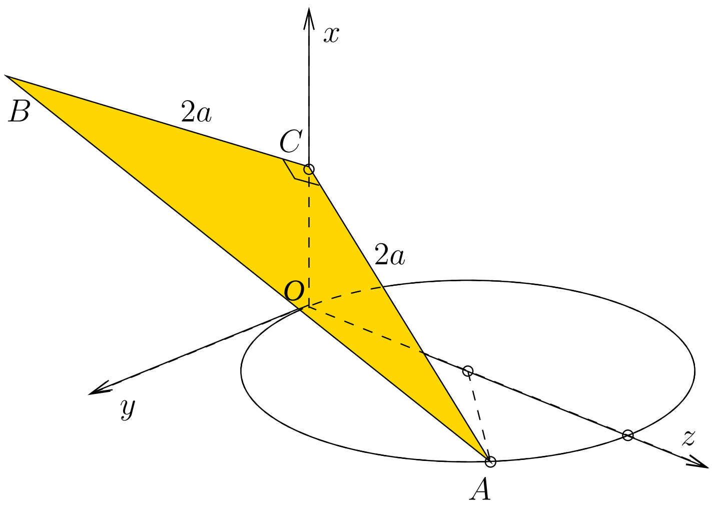
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (5 de septiembre del 2005)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

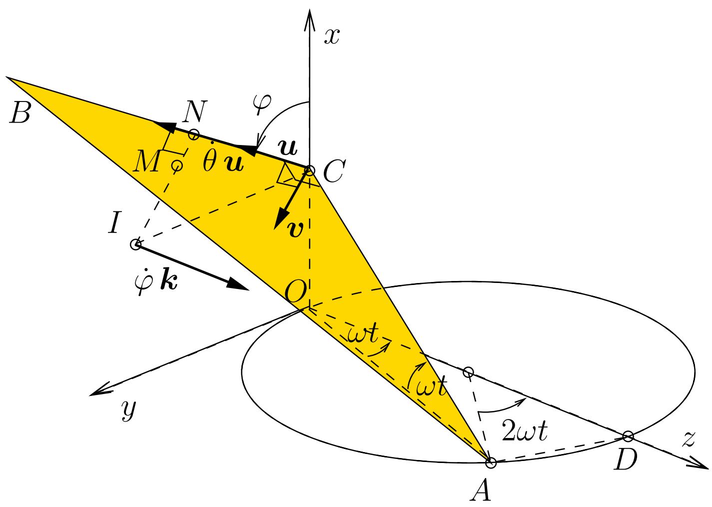
Se considera una escuadra ACB de dimensiones $\overline{CA} = \overline{CB} = 2a$, cuyo movimiento impuesto es tal que el extremo A recorre la circunferencia $(z-a)^2+y^2 = a^2$ dentro del plano Oyz con velocidad constante $v = 2\omega a$. A su vez el vértice C permanece sobre el eje Ox, y el extremo B permanece en el plano Oxy. Se pide:

1. Velocidad angular del segmento CB en su movimiento dentro del plano Oxy;
2. Velocidad angular de la escuadra, señalando el tipo de movimiento y el eje helicoidal tangente del movimiento (en un instante genérico);
3. Expresión de la velocidad y aceleración de B.



1.— El segmento CB permanece en el plano Oxy, por lo que su movimiento instantáneo se puede caracterizar como una rotación, con velocidad angular $\dot{\varphi}$, siendo φ el ángulo definido en la figura adjunta, donde también se indica el centro instantáneo de rotación I.

Para expresar las relaciones geométricas observamos en primer lugar que en el triángulo rectángulo OAD el ángulo $\angle AOD = \omega t$, y que el triángulo OAC es igual a éste y por tanto $\angle OAC = \omega t$. Expresamos los vectores correspondientes a los lados CA y CB:



$$\boldsymbol{r}_{CB} = 2a\,\boldsymbol{u} = 2a(\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j})\,,$$
$$\boldsymbol{r}_{CA} = -2a\operatorname{sen}\omega t\,\boldsymbol{i} + 2a\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\,\boldsymbol{j} + 2a\cos^2\omega t\,\boldsymbol{k}\,; \quad (1)$$

obligando a que ambos sean perpendiculares se obtiene el valor de φ:

$$\boldsymbol{r}_{CB}\cdot\boldsymbol{r}_{CA} = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\cos\omega t}\,. \quad (2)$$

La velocidad angular pedida se obtiene derivando la expresión anterior:

$$\dot{\varphi}(1+\operatorname{tg}^2\varphi) = \omega\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\cos^2\omega t} \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{\varphi} = \omega\frac{\operatorname{sen}\omega t}{1+\cos^2\omega t}}\,. \quad (3)$$

2.— El movimiento instantáneo del triángulo puede caracterizarse como composición de dos rotaciones. En primer lugar el movimiento del segmento CB dentro del plano Oxy, que será una rotación con velocidad angular $\dot\varphi\,\boldsymbol{k}$, alrededor de un eje que pase por el centro instantáneo I. Por otra parte, una rotación alrededor del segmento CB, definida por la velocidad angular $\dot\theta\,\boldsymbol{u}$, siendo $\boldsymbol{u}$ el vector unitario en dirección CB.

Para calcular $\dot\theta$ imponemos que la velocidad de A no tenga componente según x, desarrollando la expresión del campo de velocidades:

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{CA}\,; \tag{4}$$

teniendo en cuenta que $x_C = 2a\,\mathrm{sen}\,\omega t$ se obtiene $\boldsymbol{v}_C = 2a\omega\cos\omega t\,\boldsymbol{i}$, por lo que

$$\begin{aligned} 0 = \boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{i} &= 2a\omega\cos\omega t + 2a\begin{vmatrix}\dot\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi & \dot\varphi\\ \cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\omega t & \cos^2\omega t\end{vmatrix}\\ &= 2a\left(\omega\cos\omega t + \dot\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos^2\omega t - \dot\varphi\cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\omega t\right)\end{aligned} \tag{5}$$

y despejando

$$\dot\theta = -2\omega\cos\varphi = -2\omega\frac{\cos\omega t}{\sqrt{1+\cos^2\omega t}}\,. \tag{6}$$

La expresión de la velocidad angular es por tanto

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} = \dot\varphi\,\boldsymbol{k} + \dot\theta\,\boldsymbol{u} = \omega\frac{\mathrm{sen}\,\omega t}{1+\cos^2\omega t}\,\boldsymbol{k} - 2\omega\frac{\cos\omega t}{\sqrt{1+\cos^2\omega t}}\,\boldsymbol{u}\,.} \tag{7}$$

Los ejes de las dos rotaciones no se cortan, por lo que el movimiento no equivale a una rotación pura sino a un movimiento helicoidal instantáneo general con deslizamiento. El eje de este movimiento es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$, y pasará por el segmento de mínima distancia entre los ejes de rotación IN, cortando al mismo por un determinado punto M. En primer lugar, la posición de I, centro instantáneo de rotación del movimiento de CB, viene definida por $y_I = v_C/\dot\varphi = 2a(1+\cos^2\omega t)/\,\mathrm{tg}\,\omega t$ (la otra coordenada es $x_I = x_C = 2a\,\mathrm{sen}\,\omega t$). Por otra parte la distancia entre ambos ejes es $\overline{IN} = y_I/\,\mathrm{tg}\,\varphi$. Por último la posición de M se obtiene obligando a que su velocidad sea paralela a $\boldsymbol{\Omega}$,

$$\boldsymbol{v}_M = \overline{NM}\dot\theta\,\boldsymbol{k} + \overline{IM}\dot\varphi\,\boldsymbol{u} = \lambda(\dot\varphi\,\boldsymbol{k} + \dot\theta\,\boldsymbol{u})\,;\quad \overline{NM}+\overline{IM} = \overline{IN},$$

llegándose al resultado

$$\overline{IM} = \overline{IN}\frac{\dot\theta^2}{\dot\varphi^2+\dot\theta^2} = 2a\frac{\cos^4\omega t(1+\cos^2\omega t)^2\,\mathrm{sen}\,\omega t}{4\cos^2\omega t(1+\cos^2\omega t)+\mathrm{sen}^2\,\omega t}\,. \tag{8}$$

3.— La aceleración de B puede obtenerse derivando la expresión de sus coordenadas:

$$\begin{aligned} x_B &= 2a\,\mathrm{sen}\,\omega t + 2a\cos\varphi\,; & y_B &= 2a\,\mathrm{sen}\,\varphi\,;\\ \dot x_B &= 2a\omega\cos\omega t - 2a\dot\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,; & \dot y_B &= 2a\dot\varphi\cos\varphi\,;\\ \ddot x_B &= -2a\omega^2\,\mathrm{sen}\,\omega t - 2a\ddot\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi - 2a\dot\varphi^2\cos\varphi\,; & \ddot y_B &= 2a\ddot\varphi\cos\varphi - 2a\dot\varphi^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\,,\end{aligned}$$

donde habría que sustituir

$$\dot\varphi = \omega\frac{\mathrm{sen}\,\omega t}{1+\cos^2\omega t}\,;\quad \ddot\varphi = -\omega^2\frac{\cos\omega t(2+\mathrm{sen}^2\,\omega t)}{(1+\cos^2\omega t)^2}\,.$$

También se podría calcular aplicando la expresión general del campo de aceleraciones,

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_C + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\boldsymbol{r}_{CB} + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{CB}) = -2a\omega^2\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\boldsymbol{i} + 2a\ddot\varphi\,\boldsymbol{v} - 2a\dot\varphi^2\,\boldsymbol{u}\,.$$