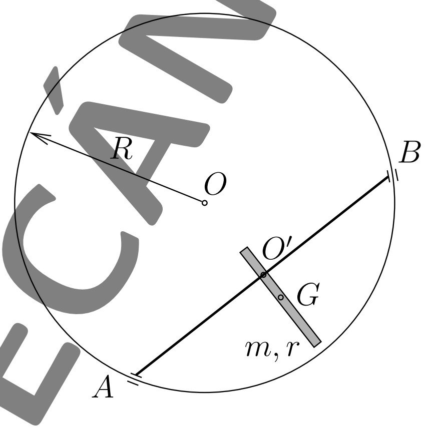
# Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (5 de septiembre del 2005)

| *Apellidos* | *Nombre* | *N.º* | *Grupo* |
|---|---|---|---|
| | | | |

*Ejercicio 5.º* (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un disco pesado de masa $m$ y radio $r$ se encuentra unido perpendicularmente a una varilla $AB$ en un punto $O'$ que se encuentra a una distancia $d = |\boldsymbol{O'G}|$ de su centro $G$. El punto $O'$ es el punto medio de la varilla $AB$, de longitud $R\sqrt{3}$ y masa despreciable, cuyos extremos pueden deslizar sin rozamiento sobre una circunferencia vertical fija de radio $R$. El disco puede girar libremente alrededor de la varilla $AB$, y se supone que en ningún momento la circunferencia fija entorpece el movimiento del disco.

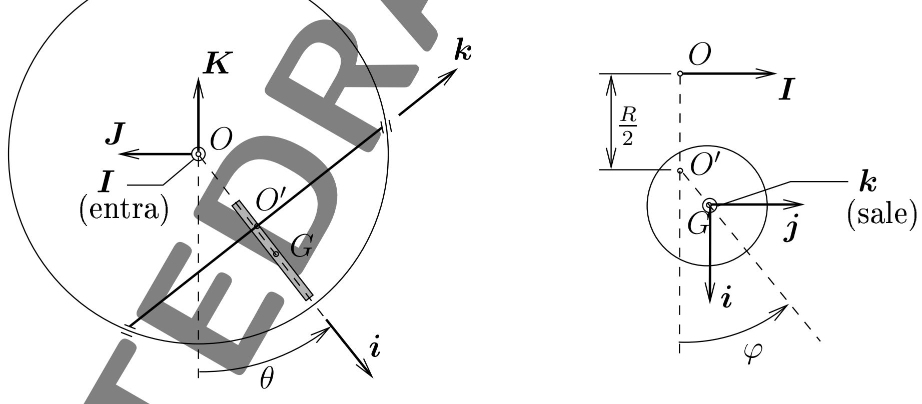



Se pide:

1. Obtener las expresiones de la velocidad de rotación del disco ($\boldsymbol{\Omega}$) y su momento cinético respecto del centro $O$ de la circunferencia fija ($\boldsymbol{H}_O$);
2. Obtención de las expresiones correspondientes a posibles integrales primeras del sistema, realizando una discusión detallada sobre ellas con el formalismo de los principios de Newton-Euler para el caso particular de $r = d = R/2$.

⋆

**1.** El sistema tiene dos grados de libertad, que podemos representar con el ángulo $\theta$ que forma el segmento OO' con la vertical y el ángulo $\varphi$ girado por el disco alrededor de la varilla $AB$, como muestra la Figura 1. También es conveniente definir un sistema móvil auxiliar, como el




a) Vista general b) Vista con disco en verdadera magnitud

Figura 1: *Definición de los grados de libertad y del sistema de referencia móvil auxiliar*

sistema $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, de forma que el versor $\boldsymbol{k}$ lleva la dirección de la varilla $AB$, $\boldsymbol{i}$ la dirección del segmento $OO'$, y $\boldsymbol{j}$ es horizontal y se encuentra en el plano del disco formando con los anteriores un triedro orientado a derechas. Adicionalmente, definimos un triedro fijo $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{j}$, la velocidad de rotación del disco se expresa:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\theta}\boldsymbol{I} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} = -\dot{\theta}\boldsymbol{j} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{1}$$

Por otro lado, el momento cinético en $O$ se puede calcular con la expresión

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{H}_G + m\boldsymbol{v}_G \wedge \boldsymbol{GO} \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\Omega} \tag{2}$$

donde el tensor central de inercia $\boldsymbol{I}_G$ y el vector $\boldsymbol{GO}$ se expresan en el sistema móvil como:

$$\boldsymbol{I}_G = \frac{1}{4}mr^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \boldsymbol{GO} = \boldsymbol{GO'} + \boldsymbol{O'O} = -d\cos\varphi\boldsymbol{i} - d\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j} - \frac{R}{2}\boldsymbol{i} \tag{3}$$

y la velocidad del centro del disco se puede calcular como:

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'G} = \frac{R}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{k} - d\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} + d\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{j} + d\dot{\theta}\cos\varphi\boldsymbol{k} \tag{4}$$

Finalmente, teniendo en cuenta (1), (2), (3) y (4) se obtiene la expresión del momento cinético en el punto $O$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_O = md\dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi\left(d\cos\varphi + \frac{R}{2}\right)\boldsymbol{i} - m\dot{\theta}\left[\frac{r^2}{4} + \left(d\cos\varphi + \frac{R}{2}\right)^2\right]\boldsymbol{j} \\ + m\dot{\varphi}\left[\frac{r^2}{2} + d^2 + d\frac{R}{2}\cos\varphi\right]\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

**2.** Se conserva la energía total del sistema formado por la varilla $AB$ y el disco, puesto que la única fuerza que trabaja (el peso) es conservativa. Teniendo en cuenta (1), (3) y que $\boldsymbol{K} = -\cos\theta\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{k}$, resulta:

$$\begin{aligned} E = T + V = cte &= \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\Omega}) + mg\,\boldsymbol{OG}\cdot\boldsymbol{K} \\ &= \frac{1}{2}m\left[d^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\left(d\cos\varphi + \frac{R}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{8}mr^2\left(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}^2\right) - mg\cos\theta\left(d\cos\varphi + \frac{R}{2}\right) \,, \end{aligned}$$

que particularizada para $r = d = R/2$ resulta:

$$E = \frac{1}{8}mR^2\left[\frac{3}{2}\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\left(\frac{5}{4} + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right)\right] - mg\frac{R}{2}\cos\theta(1+\cos\varphi) = cte. \tag{5}$$

No existen más integrales primeras. Es interesante observar que no se conserva la componente vertical del momento cinético en $O$ del conjunto formado por la varilla y el disco, puesto que existen reacciones horizontales normales al plano de la circunferencia que dan un momento vertical no nulo en $O$.

Por tanto, para obtener una segunda ecuación diferencial del movimiento del disco sería necesario plantear las ecuaciones de Euler en el punto $O$ y el principio de cantidad de movimiento, eliminando las reacciones que aparezcan. Otra posibilidad es plantear cualquiera de las dos ecuaciones de Lagrange correspondientes al movimiento del sistema.