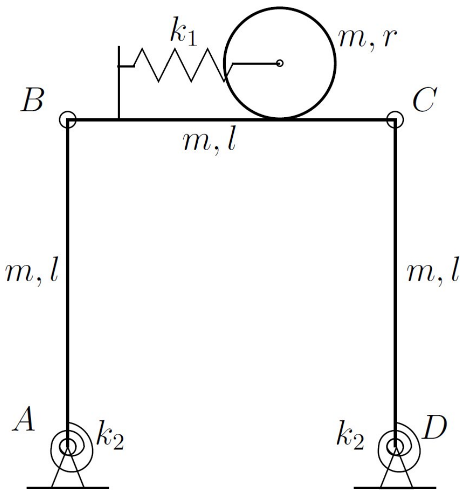
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO - REC. 4.º PARCIAL (5 de septiembre del 2005)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

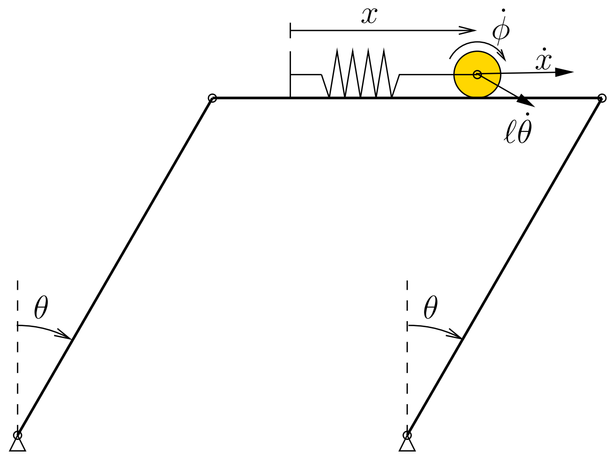
El marco $ABCD$ de la figura está constituido por tres barras iguales, articuladas en sus extremos, de masa m y longitud ℓ. En los extremos fijos A y D, están dispuestos sendos muelles de torsión que ofrecen un momento resistente proporcional al ángulo girado, siendo k_2 el valor de la constante de proporcionalidad, mientras que los extremos B y C permiten el giro libre. Asimismo un aro de masa m y radio r rueda sin deslizar en todo momento sobre la barra BC, estando unido su centro a un muelle de constante k_1 y longitud natural nula, tal y como se muestra en la figura. Se pide:



1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Linealización de las ecuaciones para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio en que AB y CD están en posición vertical y BC está lo más alto posible. Calcular el valor mínimo de la constante k_2 para que dicho equilibrio sea estable.
3. Para el caso en que la constante k_2 valga el doble del valor calculado en el apartado anterior y $k_1 = k_2/\ell^2$, obtener las frecuencias propias de las pequeñas oscilaciones.

1.— Consideramos las coordenadas $\{\theta, x\}$ para describir el sistema. La velocidad de rotación del aro vale $\dot{\phi} = \dot{x}/r$. La expresión de la energía cinética es

$$T = 2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m\ell^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\ell\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\left(mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 \quad (1)$$



y la energía potencial vale

$$V = 2\frac{1}{2}k_2\theta^2 + \frac{1}{2}k_1x^2 + 2mg\frac{\ell}{2}\cos\theta + 2mg\ell\cos\theta\,. \quad (2)$$

Por tanto la expresión de la Lagrangiana resulta

$$L = T - V = \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2 + +m\dot{x}^2 + m\dot{x}\ell\dot{\theta}\cos\theta - k_2\theta^2 - \frac{1}{2}k_1x^2 - 3mg\ell\cos\theta\,. \quad (3)$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange del movimiento:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{8}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + m\ddot{x}\ell\cos\theta + 2k_2\theta - 3mg\ell\operatorname{sen}\theta\,, \\ 0 &= 2m\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} - m\ell\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + k_1x\,. \end{aligned} \quad (4)$$

2.— Considerando $\{\theta, x\}$ pequeños así como sus derivadas, y despreciando infinitésimos de segundo orden se obtienen las ecuaciones linealizadas de la dinámica:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{8}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + m\ddot{x}\ell + 2k_2\theta - 3mg\ell\theta \\ 0 &= m\ell\ddot{\theta} + 2m\ddot{x} + k_1 x\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Estas ecuaciones se pueden expresar matricialmente:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \mathbf{0}, \quad \text{con } [\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}m\ell^2 & m\ell \\ m\ell & 2m \end{pmatrix}, \ [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} 2k_2 - 3mg\ell & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Para que el equilibrio sea estable la matriz $[\mathbf{K}]$ debe ser definida positiva, lo que exige que sea $k_2 > \frac{3}{2}mg\ell$. Esta es la condición para que las oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio sean pequeñas y el movimiento se pueda linealizar.

3.— En este caso vale $k_2 = 3mg\ell$, $k_1 = k_2/\ell^2 = 3mg/\ell$. Las frecuencias propias se obtienen mediante la ecuación característica,

$$\begin{aligned} 0 = \det([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]) &= \begin{vmatrix} 3mg\ell - \frac{8}{3}m\ell^2\omega^2 & -m\ell\omega^2 \\ -m\ell\omega^2 & 3mg/\ell - 2m\omega^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{13}{3}m^2\ell^2\omega^4 - 14m^2g\ell\omega^2 + 9m^2g^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Resolviendo se obtienen las soluciones

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{21 - 3\sqrt{10}}{13}}\sqrt{\frac{g}{\ell}} = 0{,}9411\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{21 + 3\sqrt{10}}{13}}\sqrt{\frac{g}{\ell}} = 1{,}5314\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,. \end{aligned} \tag{8}$$