Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Septiembre de 1996)

Apellidos *Nombre* Nº *Grupo*

Ejercicio 2º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y *a tinta*. Donde se pida *deducir* o *demostrar* un resultado, deberán justificarse debidamente todos los pasos, mientras que si se pide *discutir* debe realizarse una discusión razonada. Se repartirá una hoja adicional para borrador, que no se recogerá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*, ni calculadoras ni libros de ningún tipo.

Deducción de las ecuaciones de Euler para un sólido rígido con un punto fijo, con momentos de inercia A, B, C en direcciones principales. Proponer un *procedimiento de cálculo* de las reacciones en el caso de que el sólido gire alrededor de un eje fijo (1 punto fijo + 1 cojinete de revolución). (5 ptos.)

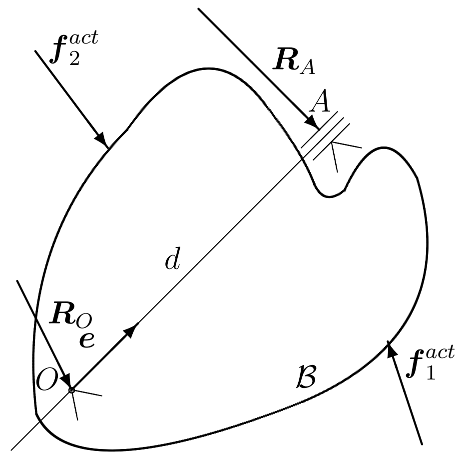
Siendo O fijo, el teorema del momento cinético permite afirmar que $\boldsymbol{M}_O = d\boldsymbol{H}_O/dt$. Expresando $\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$ y derivando a través del sistema del cuerpo (en el que las componentes del tensor de inercia $\boldsymbol{I}_O$ son constantes),

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})$$

Tomando las componentes en los ejes principales, $\boldsymbol{\Omega} = (p, q, r)$ y $\boldsymbol{M}_O = (M_x, M_y, M_z)$, desarrollando la expresión anterior resultan las 3 ecuaciones (escalares) de Euler:

$$\begin{cases} M_x = A\dot{p} - (B - C)qr, \\ M_y = B\dot{q} - (C - A)rp, \\ M_z = C\dot{r} - (A - B)pq. \end{cases}$$

Sea ahora un sólido con un eje $(O, \boldsymbol{e})$ fijo sobre el que actúan fuerzas exteriores activas con resultante $\boldsymbol{F}^{act} = \sum \boldsymbol{f}_i^{act}$ y momento $\boldsymbol{M}_O^{act} = \sum \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{f}_i^{act}$. Suponemos el eje materializado por el punto O fijo y otro punto A que tiene impedido el movimiento transversal. Las reacciones en estos enlaces son $\boldsymbol{R}_O$ (orientación arbitraria) y $\boldsymbol{R}_A$ (normal al eje). Expresamos los teoremas de Momento cinético y Cantidad de movimiento:



$$\boldsymbol{OA} \wedge \boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{M}_O^{act} = \boldsymbol{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{R}_O + \boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{F}^{act} = M \underbrace{[\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{OG} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OG})]}_{\boldsymbol{a}_G} \qquad (2)$$

Conocidos $\boldsymbol{\Omega} = \Omega e$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\Omega}\boldsymbol{e}$, despejaríamos $\boldsymbol{R}_A$ de (1):

$$\boldsymbol{R}_A = \frac{[\boldsymbol{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{M}_O^{act}] \wedge \boldsymbol{OA}}{|\boldsymbol{OA}|^2}$$

y por último, de (2),

$$\boldsymbol{R}_O = M\boldsymbol{a}_G - \boldsymbol{R}_A - \boldsymbol{F}^{act}$$

Enunciar y Demostrar las propiedades de ortogonalidad de los modos de vibración de un sistema de n grados de libertad con respecto a las matrices de masa y rigidez. (2.5 ptos.)

Sean dos modos de vibración $\{\mathbf{a}_k\}$ y $\{\mathbf{a}_l\}$ correspondientes a autovalores distintos $\lambda_k \neq \lambda_l$. Se puede escribir

$$\lambda_k \mathsf{M}\{\mathbf{a}_k\} = \mathsf{K}\{\mathbf{a}_k\} \tag{1}$$

$$\lambda_l \mathsf{M}\{\mathbf{a}_l\} = \mathsf{K}\{\mathbf{a}_l\} \tag{2}$$

premultiplicando (1) por $\{\mathbf{a}_l\}^{\mathrm{T}}$ y (2) por $\{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}$ y restando, resulta

$$(\lambda_k - \lambda_l)\{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}\mathsf{M}\{\mathbf{a}_l\} = 0$$

donde se ha hecho uso de la simetría de M y K. Puesto que $(\lambda_k - \lambda_l) \neq 0$ se obtiene la condición de ortogonalidad buscada:

$$\{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}\mathsf{M}\{\mathbf{a}_l\} = 0$$

o lo que es equivalente, considerando (2),

$$\{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}\mathsf{K}\{\mathbf{a}_l\} = 0$$

Definir sistema isostático y sistema hiperestático. (2.5 ptos.)

En cualquier sistema en equilibrio (estático) se verifican las llamadas ecuaciones cardinales de la estática para el conjunto del sistema:

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i^{ext} = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{M}_O = \sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \tag{3}$$

Estas son por tanto condiciones *necesarias*. Sin embargo, pueden no ser *suficientes* para determinar las reacciones (internas o externas) en el sistema. Cuando son suficientes las 6 condiciones escalares dadas por (3) se dice que el sistema es *isostático*. Si por el contrario no son suficientes, se dice que es *hiperestático*. (En este último caso las ecuaciones que faltan se obtendrían a partir de la consideración de la deformabilidad de los cuerpos mediante la mecánica de medios continuos).