

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Septiembre de 1996)

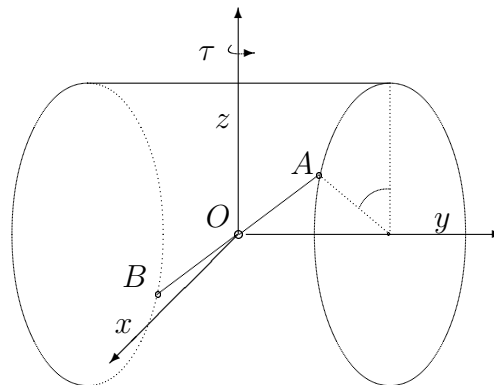
Apellidos	Nombre	Nº	Grupo

Ejercicio 5º

Tiempo: 60 min.

Un cilindro hueco (sin tapas) de masa m , radio r y altura $2h$ puede girar libremente alrededor de un eje diametral fijo Oz que pasa por su centro. A su vez una barra homogénea AB de igual masa (m) se halla dentro del cilindro de forma que sus extremos A y B se mueven sin rozamiento sobre las circunferencias de las bases opuestas del cilindro, coincidiendo su centro con el del cilindro. Se aplica al cilindro un par τ según el eje z . Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Valor del par τ para que el cilindro tenga un movimiento uniforme.



1.- Describiremos el movimiento mediante los ángulos θ (girado por el cilindro alrededor de Oz) y φ (giro de la barra respecto al cilindro alrededor de Oy , tomando el origen cuando A está en el punto más alto de la circunferencia). La expresión de la Lagrangiana del sistema es

$$L = T = \frac{1}{2} I_z^{\text{cil}} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I^{\text{barra}} \Omega_n^2 \quad (1)$$

donde Ω_n es la componente de la velocidad de rotación de la barra normal a la misma, ya que según la propia barra su inercia es nula. Calculamos Ω_n mediante

$$\Omega_n^2 = \Omega^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{t})^2$$

donde $\mathbf{t} = \mathbf{OA}/|\mathbf{OA}|$ es el versor de la barra, cuya longitud llamaremos $2l$, siendo $l = \sqrt{h^2 + r^2}$:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{l} (r \sin \varphi, h, r \cos \varphi); \quad \boldsymbol{\Omega} = (0, \dot{\varphi}, \dot{\theta});$$

$$\begin{aligned} \Omega_n^2 &= (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) - \frac{1}{l^2} (h\dot{\varphi} + r\dot{\theta} \cos \varphi)^2 \\ &= \frac{1}{l^2} [r^2 \dot{\varphi}^2 + (h^2 + r^2 \sin^2 \varphi) \dot{\theta}^2 - 2hr\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \varphi] \end{aligned}$$

Los momentos de inercia son

$$I_z^{\text{cil}} = m \left(\frac{h^2}{3} + \frac{r^2}{2} \right), \quad I^{\text{barra}} = \frac{1}{3} ml^2.$$

Sustituyendo estos valores en (1), resulta la expresión de la Lagrangiana

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{h^2}{3} + \frac{r^2}{2} \right) \dot{\theta}^2 + \frac{m}{6} \left[r^2 \dot{\varphi}^2 + (h^2 + r^2 \sin^2 \varphi) \dot{\theta}^2 - 2hr \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \varphi \right] \quad (2)$$

Para obtener las ecuaciones de Lagrange derivamos e incluimos como fuerza generalizada según la coordenada θ el par externo τ :

$$\frac{m}{3} r^2 \ddot{\varphi} - \frac{m}{3} hr \ddot{\theta} \cos \varphi - \frac{m}{3} r^2 \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0 \quad (3)$$

$$\frac{m}{3} \left(2h^2 + \frac{3}{2} r^2 + r^2 \sin^2 \varphi \right) \ddot{\theta} + \frac{2m}{3} r^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{m}{3} hr \ddot{\varphi} \cos \varphi + \frac{m}{3} hr \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = \tau \quad (4)$$

2.- El movimiento uniforme corresponde a $\dot{\theta} = \omega$; $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = 0$. Sustituyendo en (4):

$$\tau = \frac{2m}{3} r^2 \omega \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{m}{3} hr \ddot{\varphi} \cos \varphi + \frac{m}{3} hr \dot{\varphi}^2 \sin \varphi; \quad (5)$$

y sustituyendo en (3):

$$\ddot{\varphi} = \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

ecuación que a su vez admite una integral directa,

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 + \omega^2 \sin^2 \varphi,$$

siendo la constante $\dot{\varphi}_0$ el valor de $\dot{\varphi}$ en $\varphi = 0$. Eliminando de esta manera $\ddot{\varphi}$ y $\dot{\varphi}$ en la ecuación (5) queda finalmente:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2m}{3} r^2 \omega \sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + \omega^2 \sin^2 \varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{m}{3} hr \omega^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \\ &\quad + \frac{m}{3} hr (\dot{\varphi}_0^2 + \omega^2 \sin^2 \varphi) \sin \varphi \end{aligned}$$

es decir,

$$\tau(\varphi) = \frac{2m}{3} r^2 \omega \sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + \omega^2 \sin^2 \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{m}{3} hr \sin \varphi [\dot{\varphi}_0^2 + \omega^2 (2 \sin^2 \varphi - 1)]$$