Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Septiembre de 1996)

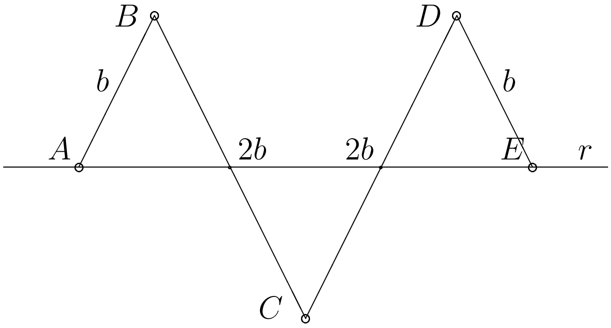
Apellidos *Nombre* Nº *Grupo*

Ejercicio 6º Tiempo: 45 min.

Se da un conjunto de cuatro varillas AB, BC, CD, DE articuladas entre sí, cuyas longitudes son: $AB = DE = b$; $BC = CD = 2b$. Se mueve cumpliendo las siguientes condiciones: 1) el extremo A permanece fijo; 2) el extremo E, así como los puntos medios de BC y CD, recorren una recta fija r, que pasa por A; 3) la varilla AB tiene en todo instante una velocidad angular con dos componentes constantes, según r, de valor Ω_1, y según la normal al plano determinado por AB y r, de valor Ω_2.

Se pide:

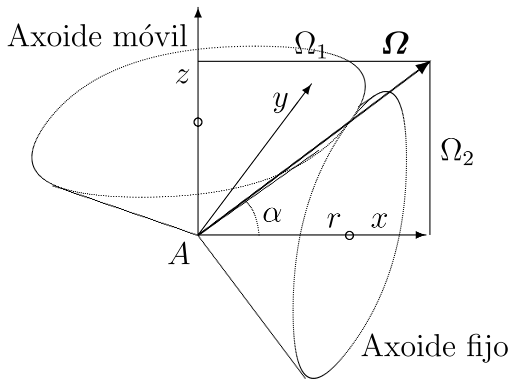
1. Determinar los axoides fijo y móvil del movimiento de AB.
2. Definir completamente los movimientos relativos, respecto de AB, de las varillas CD y DE.
3. Calcular la velocidad y la aceleración absolutas del punto P de corte de las rectas soporte de AB y DE.



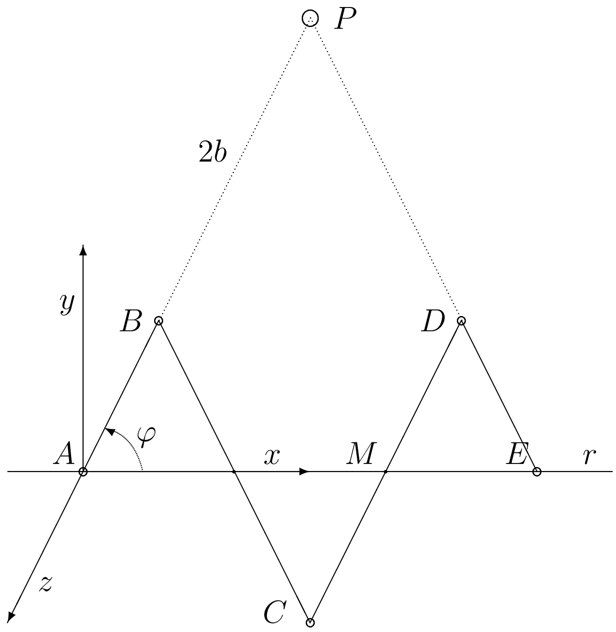
Las cuatro barras están contenidas en todo instante en un mismo plano Π, definido por r y AB. Sin embargo, el movimiento no es plano, debido a la componente Ω_1 de la rotación que hace girar a Π alrededor de r.

Definimos unos ejes móviles ligados al movimiento del plano Π con Ax según r, Ay perpendicular al anterior dentro del plano, y Az perpendicular a los anteriores formando un triedro a derechas. En este triedro la velocidad de rotación de AB es $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1 \boldsymbol{i} + \Omega_2 \boldsymbol{k}$.

1.- Al ser A fijo, el movimiento de AB es una rotación, cuyo eje instantáneo definido por $(A, \boldsymbol{\Omega})$ forma en todo instante un ángulo $\alpha = \tan^{-1}(\Omega_2/\Omega_1)$ constante con r. Por tanto el axoide fijo será un cono de eje $r \equiv Ax$, vértice A y semiángulo cónico α.
Observamos que en relación con Az (perpendicular por A al plano Π) el eje de rotación forma también un ángulo constante $(\pi/2-\alpha)$. Por tanto el axoide móvil es un cono de eje Az, vértice A y semiángulo $(\pi/2 - \alpha)$, que rueda sin deslizar sobre el axoide fijo.



2.- Es inmediato comprobar que CD es paralela a AB, por lo que la velocidad de rotación del movimiento relativo es nula ($\boldsymbol{\Omega}_{CD|AB} = \mathbf{0}$), o lo que es lo mismo, el movimiento de CD es una traslación respecto de AB. Para definirlo completamente falta obtener la velocidad de un punto cualquiera. Lo más sencillo es observar que C dista $2b$ de B, por lo que recorre una circunferencia dentro del plano Π, con centro B, radio $2b$ y velocidad angular $-2\dot{\varphi} = -2\Omega_2$ (observemos que $\widehat{ABC} = (\pi - 2\varphi)$). Es decir, el movimiento relativo es una traslación circular con centro en B y velocidad $4b\Omega_2$. Otra manera (equivalente) para definirlo sería expresar la velocidad relativa del punto M (medio de CD) respecto de A:



$$\boldsymbol{v}_{M|A} = (-b\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi - 2b\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi - b\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi)\boldsymbol{i} = -4b\Omega_2\operatorname{sen}(\Omega_2 t)\,\boldsymbol{i} \tag{1}$$

(suponiendo $\varphi|_{t=0} = 0$).

La varilla DE forma un ángulo $(\pi - 2\varphi)$ con AB. Por tanto, $\boldsymbol{\Omega}_{DE|AB} = -2\Omega_2\boldsymbol{k}$. Por otra parte, observamos que el punto P de corte con AB permanece fijo sobre los dos lados (siendo $AP = PE = 3b$), por lo que el movimiento relativo de DE es una rotación con centro en P y velocidad angular $-2\Omega_2$ (nota: no debe confundirse *rotación* con *traslación circular*). Alternativamente, podríamos haber calculado la velocidad de E relativa a A, de forma similar a (**??**):

$$\boldsymbol{v}_{E|A} = -6b\Omega_2\operatorname{sen}(\Omega_2 t)\,\boldsymbol{i}.$$

3.- Como se ha dicho arriba, P es un punto solidario a la varilla AB. Basta por tanto obtener su velocidad y aceleración absolutas debido al movimiento de AB:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP} = 3b\Omega_1\operatorname{sen}(\varphi)\boldsymbol{k} + 3b\Omega_2\left[-\operatorname{sen}(\varphi)\boldsymbol{i} + \cos(\varphi)\boldsymbol{j}\right]$$

$$\boldsymbol{a}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{AP} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP})$$

y teniendo en cuenta que

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \Omega_1\boldsymbol{i} \wedge (\Omega_1\boldsymbol{i} + \Omega_2\boldsymbol{k}) = -\Omega_1\Omega_2\boldsymbol{k},$$

resulta finalmente

$$\boldsymbol{a}_P = -3b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\operatorname{sen}(\varphi)\boldsymbol{j} - 3b\Omega_2^2\cos(\varphi)\boldsymbol{i} + 6b\Omega_1\Omega_2\cos(\varphi)\boldsymbol{k}.$$

Otra manera de operar, con la que se obtendría igual resultado, sería mediante la composición del movimiento de P relativo al plano Π (rotación $\Omega_2\boldsymbol{k}$ con centro en A) con el de este plano (rotación $\Omega_1\boldsymbol{i}$), sumando las aceleraciones de arrastre, Coriolis y relativa:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{arr} &= -3b\Omega_1^2\operatorname{sen}(\varphi)\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{a}_{cor} &= 6b\Omega_1\Omega_2\cos(\varphi)\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{a}_{rel} &= -3b\Omega_2^2\left[\cos(\varphi)\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}(\varphi)\boldsymbol{j}\right]
\end{aligned}$$