Mecánica

EXAMEN PARCIAL (24 de enero del 2006)

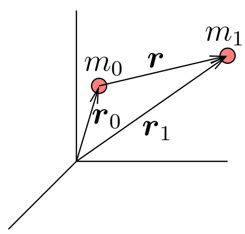
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Sea un sistema binario aislado, formado por dos masas m_0 y m_1 que se atraen mutuamente mediante fuerzas centrales $\boldsymbol{f} = \pm f(r)\boldsymbol{u}_r$, siendo $\boldsymbol{r}$ el vector posición relativo de m_1 respecto a m_0, $r = |\boldsymbol{r}|$ y $\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{r}/r$. *Expresar* la ecuación del movimiento de m_1 con respecto a m_0, en función de $\boldsymbol{r}$. *Aplicación:* caso en que la fuerza atractiva $f(r)$ sea proporcional al producto de las masas y a la distancia entre ambas, con constante de proporcionalidad k. (5 ptos.)

Consideramos las masas m_0 y m_1 en una referencia inercial definidas respectivamente por los vectores posición $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1)$. El vector posición relativa de 1 respecto a 0 es $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$. Sin embargo, en esta referencia relativa no puede aplicarse directamente la segunda ley de Newton ($\boldsymbol{f} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$) al no ser inercial. Establecemos las ecuaciones de la dinámica de cada masa en la referencia inercial teniendo en cuenta la fuerza de interacción $\boldsymbol{f}_{10} = -f(r)\boldsymbol{u}_r$ (fuerza sobre 1 ejercida por 0, atractiva, de donde se sigue el signo $-$) y $\boldsymbol{f}_{01} = -\boldsymbol{f}_{10}$ (fuerza sobre 0 ejercida por 1):



$$\left.\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= \frac{1}{m_1}\boldsymbol{f}_{10} \\ \ddot{\boldsymbol{r}}_0 &= \frac{1}{m_0}\boldsymbol{f}_{01} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_1 - \ddot{\boldsymbol{r}}_0 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_0}\right)\boldsymbol{f}_{10}\,. \tag{1}$$

Desarrollando la ecuación anterior se obtiene

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} f(r)\boldsymbol{u}_r\,. \tag{2}$$

Empleando el coeficiente $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}$ que se puede considerar como una *masa reducida*, la expresión (2) puede considerarse como una ecuación de la dinámica relativa, similar a la segunda ley de Newton:

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{f} = -f(r)\boldsymbol{u}_r\,. \tag{3}$$

Aplicación: En este caso el valor de la fuerza es $f(r) = km_0m_1r$, lo cual sustituido en (2) arroja:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -k(m_0 + m_1)\boldsymbol{r}\,. \tag{4}$$

Sea un sistema dinámico definido mediante coordenadas libres $\{q_j,\ j = 1, \dots n\}$ con Lagrangiana $L(q_j, \dot{q}_j, t)$. *Deducir* en qué casos la integral de Jacobi $h = \sum_{j=1}^{n} (\partial L/\partial \dot{q}_j)\dot{q}_j - L$ se conserva y cuándo coincide con la energía mecánica total del sistema. *Aplicación:* estudiar un péndulo simple (masa puntual m y longitud ℓ), a cuyo punto de anclaje se impone una velocidad horizontal constante v_0. (5 ptos.)

Derivando la función lagrangiana y haciendo uso de la regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \,,$$

donde se acepta la convención de suma implícita para los índices repetidos. Si se tiene en cuenta ahora las ecuaciones de Lagrange $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,(\mathrm{d}L/\mathrm{d}\dot{q}_j) - \mathrm{d}L/\mathrm{d}q_j = 0$ se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} \,.$$

Se deduce por tanto que si L no depende explícitamente del tiempo, la *integral de Jacobi* es una constante del movimiento:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = \text{cte.}}$$

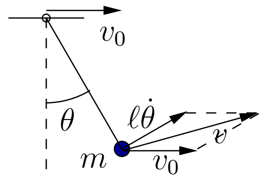
Admitiendo que el potencial V no depende de las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$, si la energía cinética es una función cuadrática homogénea de las mismas, h coincidirá con la energía total:

$$\text{si } T = \frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - (T - V) = \underbrace{(a_{ij}\dot{q}_j)\,\dot{q}_i}_{=2T} - (T - V) = T + V \,.$$

La condición anterior se cumplirá siempre que la definición de las coordenadas generalizadas no dependa del tiempo, es decir $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\boldsymbol{r}_k(q_i) = 0$. En este caso la conservación de h equivale al principio de conservación de la energía. En caso contrario será en general $h \neq T + V$, que además según los casos podrá o no conservarse.

Aplicación: La Lagrangiana vale en este caso

$$L = \frac{1}{2}m\left(\ell^2\dot{\theta}^2 + v_0^2 + 2v_0\ell\dot{\theta}\cos\theta\right) + mg\ell\cos\theta \,.$$



Puesto que L no depende explícitamente de t, se conserva la integral de Jacobi:

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell\cos\theta \quad \text{(cte.)} \,.$$

Puesto que se emplea un sistema de coordenadas móvil (la base del péndulo), T no es homogénea cuadrática en $\dot{\theta}$ y la integral de Jacobi no coincide con la energía ($h \neq T+V$), que no se conserva:

$$T + V = \frac{1}{2}m\left(\ell^2\dot{\theta}^2 + v_0^2 + 2v_0\ell\dot{\theta}\cos\theta\right) - mg\ell\cos\theta \,.$$