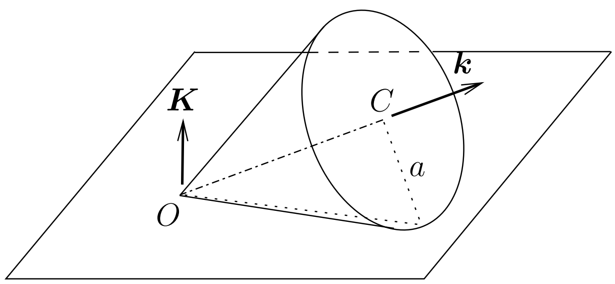
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (24 de enero del 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

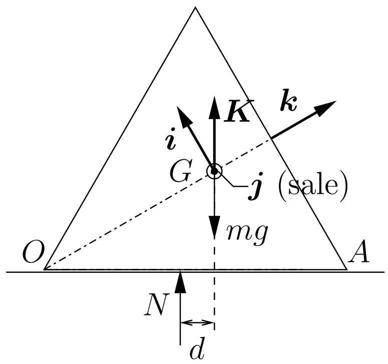
Se considera un cono de masa m, radio de la base a y semiángulo $\pi/6$ que permanece apoyado sobre un plano horizontal fijo y liso, de forma que puede pivotar y deslizar libremente, manteniéndose en contacto a través de una generatriz. En el instante inicial se impone al cono una rotación alrededor de su eje $(O, \boldsymbol{k})$ con velocidad ω_0. A su vez se imprime una velocidad de rotación al eje del cono alrededor de la vertical $\boldsymbol{K}$ de igual valor ω_0. Se pide:



1. Estudiar las integrales primeras que existan obteniendo la expresión de las mismas.
2. Obtener la reacción del plano sobre el cono (se trata de una fuerza distribuida sobre la generatriz, equivalente a su resultante aplicada en un determinado punto de la misma, lo que habrá que calcular).
3. Obtener el valor de ω_0 que ocasionaría que el cono se levantase del plano por uno de los extremos de la generatriz de contacto. Interpretar cualitativamente el fenómeno mediante el efecto giroscópico, deduciendo cuál de los dos extremos se levantaría.

⋆

1.— Consideramos los ejes definidos por las direcciones unitarias $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ indicadas en la figura, que define un plano vertical por el eje del cono en un instante genérico del movimiento. Para describir el movimiento tomaremos, además de la posición de G, los ángulos de Euler, definidos como precesión ψ alrededor del eje $\boldsymbol{K}$ y rotación propia ϕ alrededor del eje $\boldsymbol{k}$. (En este caso no hay nutación θ alrededor del eje $\boldsymbol{j}$ debido al apoyo sobre la generatriz.) La velocidad de rotación será entonces



$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\,\boldsymbol{K} + \dot{\phi}\,\boldsymbol{k} = \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\psi}\,\boldsymbol{i} + \left(\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\psi}\right)\boldsymbol{k}\,. \tag{1}$$

En el instante inicial tanto $\dot{\psi}$ como $\dot{\phi}$ valen ω_0, por lo que la velocidad angular inicial será $\boldsymbol{\Omega}_0 = (\sqrt{3}/2)\omega_0\,\boldsymbol{i} + (3/2)\omega_0\,\boldsymbol{k}$. Por otra parte, los momentos principales de inercia del cono en el centro de masas G son

$$A = I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{80}mh^2\left(1 + 4\frac{a^2}{h^2}\right) = \frac{21}{80}ma^2; \quad C = I_{zz} = \frac{3}{10}ma^2\,. \tag{2}$$

Discutimos primero las integrales primeras de conservación de momento. Las fuerzas que actúan sobre el cono son únicamente su peso mg y la reacción del plano sobre la generatriz, que equivale a la resultante N aplicada en un determinado punto de la misma. Estas dos fuerzas son verticales, por lo que la proyección del momento de las fuerzas sobre esa dirección es nula y la componente correspondiente del momento cinético se conserva:

$$H_Z = \boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{K} = A\frac{3}{4}\dot{\psi} + C\left(\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\psi}\right)\frac{1}{2} = A\frac{3}{4}\omega_0 + C\frac{3}{4}\omega_0 \quad (\text{cte})\,. \tag{3}$$

Por otra parte, las fuerzas cortan al eje $(O, \boldsymbol{k})$ del cono, por lo que teniendo en cuenta la simetría de revolución del mismo conduce a que se conserve la componente del momento cinético según dicho eje:

$$H_z = \boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k} = C\left(\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\psi}\right) = C\frac{3}{2}\omega_0 \quad (\text{cte})\,. \tag{4}$$

Teniendo en cuenta las dos ecuaciones de conservación (3) y (4) se deduce que las componentes de la velocidad angular son constantes:

$$\dot{\psi} = \omega_0; \quad \dot{\phi} = \omega_0\,. \tag{5}$$

En cuanto al momento lineal y el movimiento del centro de masas G, su altura es constante debido al apoyo sobre el plano. En dirección horizontal no hay fuerzas por lo que su velocidad $\boldsymbol{v}_G$ será constante.

En relación con la energía, todas las fuerzas son conservativas y el apoyo sobre el plano es liso, por lo cual se conserva la energía:

$$E = T + V = \frac{1}{2}A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\psi}\right)^2 + \frac{1}{2}C\left(\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\psi}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 + mgZ_G \quad (\text{cte.})\,. \tag{6}$$

En cualquier caso, todas las variables que intervienen en esta expresión ya habíamos concluido que eran constantes ($\dot{\psi} = \dot{\phi} = \omega_0, v_G, Z_G$) por lo cual no aporta información adicional.

2.— El valor de la reacción será evidentemente $N = mg$, ya que no hay movimiento vertical de G. Para determinar su posición, definida por la distancia d respecto de la vertical por G, aplicaremos el balance del momento cinético (ecuaciones de Euler). Emplearemos la referencia móvil $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ definida anteriormente, cuya velocidad de rotación es $\omega_0\,\boldsymbol{K}$. (Esta referencia constituye un *triedro intermedio* que no coincide con el *triedro del cuerpo* al no seguir la rotación propia.) Para un observador en esta referencia el momento cinético $\boldsymbol{H}_G$ es constante, por lo que la derivada del mismo procede de la rotación de dicha referencia, siendo una manifestación del denominado *efecto giroscópico*. El balance del momento cinético se expresa como:

$$-\,mgd\,\boldsymbol{j} = \omega_0\,\boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{H}_G = \omega_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right) \wedge \left(A\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\boldsymbol{i} + C\frac{3}{2}\omega_0\boldsymbol{k}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega_0^2(A - 3C)\boldsymbol{j}\,, \tag{7}$$

de donde se obtiene

$$d = \frac{3C - A}{mg}\frac{\sqrt{3}}{4}\omega_0^2 = \frac{51\sqrt{3}}{320}\frac{a^2\omega_0^2}{g}\,. \tag{8}$$

3.— Según (8) la excentricidad d aumenta proporcionalmente a ω_0^2. El límite es cuando se alcanza el vértice O del cono, levantándose por el extremo A de la generatriz:

$$d_{\text{máx}} = \frac{3}{4}a\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{8}a \quad \Rightarrow \quad \omega_{0,\text{máx}}^2 = \frac{40\sqrt{3}}{17}\frac{g}{a}\,. \tag{9}$$