

# Mecánica

EXAMEN PARCIAL (1 de abril del 2006)

Apellidos	Nombre	N.º	Grupo

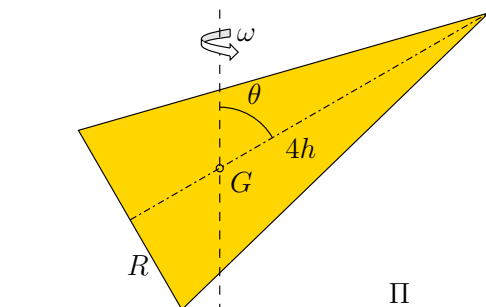
Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30)

Tiempo: 60 min.

Se considera un cono recto de revolución de masa  $M$ , radio de la base  $R$  y altura  $4h$  en contacto con un plano  $\Pi$  a través del perímetro de su base, con un movimiento de rodadura sin deslizamiento, como se muestra en la figura.

Sabiendo que el movimiento es tal que el C.D.M.  $G$  permanece quieto, siendo  $\theta$  el ángulo que forma el eje del cono con la vertical, calcular la velocidad de rotación  $\omega$  del eje del cono alrededor de la vertical para que dicho movimiento sea posible, expresándola en función de  $h$ ,  $R$  y  $\theta$ .

NOTA: Los momentos centrales principales de inercia para un cono de masa  $M$ , radio  $R$  y altura  $H$  son  $I_1 = (3/80)M(4R^2 + H^2)$ ,  $I_2 = (3/10)MR^2$ .



El movimiento descrito exige que el ángulo  $\theta$  sea constante. Igualmente la velocidad de precesión  $\omega$  debe ser constante, cuestión que se deduce inmediatamente de la conservación de la energía. Se trata por tanto de un movimiento uniforme.

Para describir el movimiento emplearemos el triedro  $\{i, j, k\}$  dibujado en la figura. La dirección  $i$  es la de máxima pendiente de la base, por tanto el triedro no acompaña al cono en su rotación propia. Por una parte podemos interpretar la velocidad de rotación  $\Omega$  del cono como una precesión  $\omega$  y una rotación propia, cuyas componentes en este triedro son:

$$\Omega = \omega \mathbf{K} + \dot{\varphi} \mathbf{k} = \omega \sin \theta \mathbf{i} + (\dot{\varphi} + \omega \cos \theta) \mathbf{k}.$$

Por otra parte, esta rotación instantánea del cono pasa por el punto de contacto  $A$  y por el centro de masas  $G$  del cono, ya que ambos tienen velocidad nula en cada instante. Por geometría de masas sabemos que la distancia del centro de la base  $B$  a  $G$  es  $h$  (cuarta parte de la altura). Por tanto la relación que se establece entre las componentes de  $\Omega$  conduce a

$$\Omega_z = \frac{h}{R} \Omega_x = \frac{h}{R} \omega \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \Omega = \omega \sin \theta \left( \mathbf{i} + \frac{h}{R} \mathbf{k} \right).$$

El vector  $\Omega$  se mantiene en el plano vertical móvil que contiene al eje del cono y sus componentes son constantes en el triedro intermedio descrito. El momento cinético vale  $\mathbf{I}_G \cdot \Omega = A \Omega_x \mathbf{i} + C \Omega_z \mathbf{k}$  (siendo  $A, C$  los momentos principales de inercia) y también tiene componentes constantes en esta referencia, que gira con velocidad  $\omega \mathbf{K}$ . Por tanto, la ecuación dinámica de balance de momento cinético conduce a:

$$\mathbf{M}_G = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_G \cdot \Omega) = \omega \mathbf{K} \wedge (\mathbf{I}_G \cdot \Omega) = \left( A \omega^2 \sin \theta \cos \theta - C \omega^2 \sin^2 \theta \frac{h}{R} \right) \mathbf{j}.$$

El momento  $\mathbf{M}_G$  está producido por la reacción  $N = Mg$  en  $A$ . Desarrollando los términos de la ecuación anterior resulta finalmente

$$\omega^2 = \frac{20}{3} \frac{g}{R \sin \theta} \frac{\cos \theta - (h/R) \sin \theta}{[(1 + 4h^2/R^2) \cos \theta - 2(h/R) \sin \theta]}.$$

