

Mecánica

1^{er} EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (29 de enero de 1997)

Apellidos	Nombre	N ^o	Grupo

Ejercicio 4^o

Tiempo: 45 min.

Cuatro varillas iguales, lisas y de longitud $2b$ cada una, están soldadas entre sí formando un cuadrado horizontal fijo de lado $2b$. Sobre cada una de ellas puede moverse una partícula de masa m . Cada partícula está unida a las dos situadas sobre lados contiguos, mediante sendos resortes elásticos de constante k y longitud natural despreciable.

Se abandona el sistema en reposo, estando situada cada partícula a una distancia a_i ($i = 1, \dots, 4$) del centro de la varilla sobre la que debe permanecer. Se pide:

1. Ecuaciones del movimiento de las partículas.
2. Demostrar que al cabo de un cierto tiempo t (cuyo valor se calculará) las posiciones de las partículas determinan un cuadrado (cuyo lado l también se calculará) con independencia de los valores iniciales a_i .

1.- Para definir el movimiento se establecen las coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) medidas desde el centro de cada lado en sentido contrario a las agujas del reloj. La longitud del muelle i que une las partículas i e $(i + 1)$ viene dada por $l_i^2 = (b - x_i)^2 + (b + x_{i+1})^2$. Sobre la partícula i actúan las fuerzas de los muelles $(i - 1)$ e i , kl_{i-1} y kl_i respectivamente. La fuerza resultante sobre la partícula en dirección de la varilla se obtiene proyectando estas fuerzas sobre la misma:

$$F_i = -kl_{i-1} \frac{b + x_i}{l_{i-1}} + kl_i \frac{b - x_i}{l_i} = -2kx_i,$$

La ecuación dinámica del movimiento de la partícula i es por tanto

$$m\ddot{x}_i + 2kx_i = 0 \tag{1}$$

2.- Todas las partículas comienzan en reposo ($x_i|_0 = a_i$), por lo que el movimiento resultante de integrar (1) es en todos los casos

$$x_i = a_i \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right).$$

Todas las partículas tienen el mismo periodo, $\tau = 2\pi/\sqrt{2k/m}$. Al cabo de un cuarto de periodo ($\tau/4$) estarán todas en el centro de su lado respectivo ($x_i = 0$) formando un cuadrado de lado $b\sqrt{2}$.

