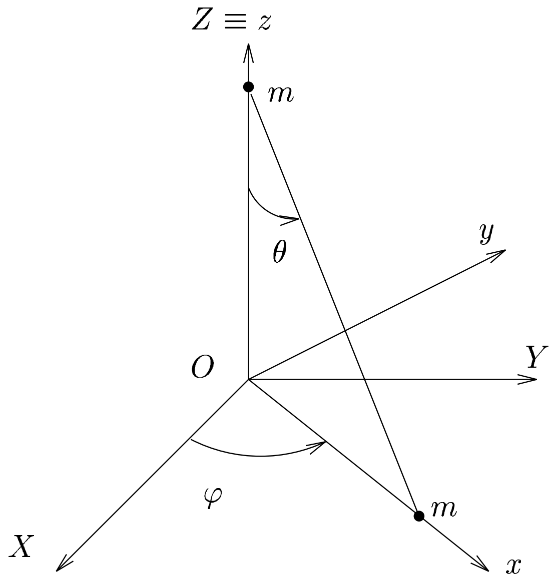
Mecánica

1$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (29 de enero de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 2º Tiempo: 45 min.



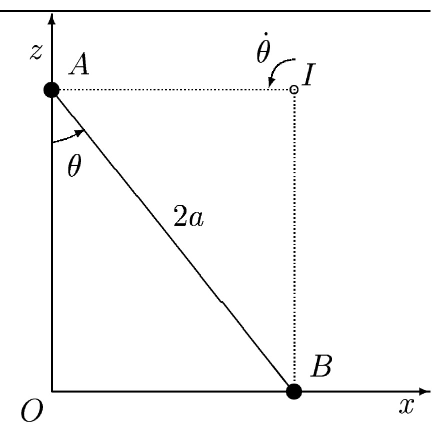
Dos masas puntuales (pesadas) m están unidas por una varilla rígida de longitud $2a$ y masa despreciable, estando obligadas a moverse dentro de un plano vertical Oxz, de forma que una desliza sobre un eje vertical Oz y la otra desliza sobre una recta horizontal Ox del mismo, ambas sin rozamiento. A su vez el plano vertical Oxz puede girar alrededor del eje Oz, no poseyendo otra masa que la correspondiente a las dos partículas antes citadas.

Se pide:

1. En la hipótesis de que el giro del plano alrededor de Oz es libre sin ninguna resistencia ni momento aplicado según este eje, obtener las ecuaciones diferenciales (de 2º orden) del movimiento.

2. Supuesto que se parte de unas condiciones iniciales dadas $(\theta_0, \dot{\theta}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0)$, integrales primeras (ecuaciones difereciales de 1$^{\text{er}}$ orden) que existan y su interpretación física.

3. Calcular el valor del momento M que debe aplicarse según el eje Oz para obtener un movimiento de rotación uniforme ($\dot{\varphi} = \omega$) del plano.



1.- Llamaremos A a la masa que está en el eje Oz y B a la que está sobre el eje Ox. El movimiento se puede interpretar como composición de dos rotaciones: una rotación $\dot{\theta}$ dentro del plano Oxz, alrededor de un centro I situado sobre la intersección de las normales a los ejes Ox y Oz, y otra $\dot{\varphi}$ alrededor del eje Oz. Llamando $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ a los versores según los ejes $Oxyz$ móviles, las velocidades de las masas son:

$$\boldsymbol{v}_A = -2a\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta \, \boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{v}_B = 2a\dot{\theta}\cos\theta \, \boldsymbol{i} + 2a\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta \, \boldsymbol{j}$$

Operando, la expresión de la Lagrangiana resulta

$$L = 2ma^2\dot{\theta}^2 + 2ma^2\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta - 2mga\cos\theta$$

y a partir de L, se obtienen las ecuaciones diferenciales del movimiento:

$$4ma^2\ddot{\theta} - 4ma^2\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - 2mga\cos\theta = 0 \tag{1}$$

$$4ma^2\ddot{\varphi}\operatorname{sen}^2\theta + 8ma^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 \tag{2}$$

2.- La energía total del sistema se mantiene constante, al ser las fuerzas conservativas:

$$2ma^2\dot{\theta}^2 + 2ma^2\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta + 2mga\cos\theta = 2ma^2\dot{\theta}_0^2 + 2ma^2\dot{\varphi}_0^2\operatorname{sen}^2\theta_0 + 2mga\cos\theta_0 \tag{3}$$

Por otra parte, la coordenada φ es cíclica ($\partial L/\partial\varphi = 0$):

$$4ma^2\dot{\varphi}\operatorname{sen}^2\theta = 4ma^2\dot{\varphi}\operatorname{sen}^2\theta_0 \tag{4}$$

ecuación que corresponde a la conservación del momento cinético respecto al eje Oz, ya que todas las fuerzas pasan por él o son paralelas a él.

3.- Para conseguir una velocidad de rotación constante habría que aplicar un par M en dirección del eje Oz, que equivale a una fuerza generalizada $Q_\varphi \equiv M$. Se modifica entonces la ecuación (2) para introducir éste a la derecha del signo =:

$$4ma^2\ddot{\varphi}\operatorname{sen}^2\theta + 8ma^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta = Q_\varphi$$

y considerando $\dot{\varphi} = \omega,\ \ddot{\varphi} = 0$, resulta

$$M = 4ma^2\omega\dot{\theta}\operatorname{sen}2\theta \tag{5}$$