Mecánica

EXAMEN PARCIAL (10 de junio del 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 45 min.

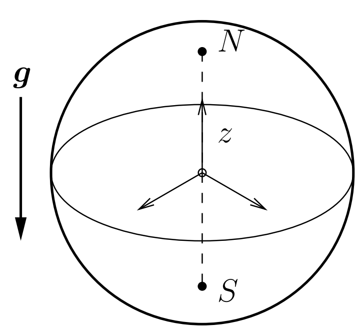
Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Se considera un sistema mecánico conservativo y autónomo. *Enunciar* el concepto de estabilidad del equilibrio. *Justificar* las condiciones para ello. Aplicación: Se considera una partícula pesada ligada a una superficie esférica lisa y fija; *discutir* la estabilidad de las posiciones de equilibrio. (5 ptos.)

Un sistema material está en *equilibrio* cuando todas sus partículas se encuentran en reposo y permanecen en el mismo estado. El concepto de *estabilidad* se refiere a la respuesta del sistema para una perturbación del equilibrio bien en las coordenadas $\{q_i\}$, o bien en velocidades $\{\dot{q}_i \neq 0\}$, lo que produce una pérdida de la condición de reposo. Se dice que el equilibrio es *estable* cuando la variación subsiguiente respecto de la posición de equilibrio está acotada, llegando a ser tan pequeña como se desee para una perturbación suficientemente pequeña.

Siempre que el potencial tenga un *mínimo local* en la posición de equilibrio éste será estable. La justificación de esta condición puede hacerse de manera sencilla considerando que en el equilibrio la energía (cinética más potencial) se anula, $E = T + V = 0$, tomando sin pérdida de generalidad el cero de potencial V en dicha posición. Una perturbación pequeña producirá un movimiento cuya energía será constante al tratarse de un sistema conservativo, $T + V = \epsilon$. La energía cinética es una magnitud intrínsecamente positiva $T \geq 0$, y la energía potencial cerca de la posición de equilibrio también será positiva al tratarse de un mínimo local, $V \geq 0$. En consecuencia ambas componentes están acotadas por $\epsilon > 0$: $T \leq \epsilon$, $V \leq \epsilon$. Suponiendo el sistema definido mediante coordenadas $\{q_i\}$ y que la función $V(q_i)$ es regular, se deduce directamente que las coordenadas sufrirán perturbaciones pequeñas respecto de la posición de equilibrio, verificándose la estabilidad.

Para la aplicación propuesta es fácil deducir en primer lugar que hay dos posiciones de equilibrio, en los polos N y S de la esfera. El potencial gravitatorio puede expresarse como $V = mgz$, siendo z la coordenada vertical ascendente. Resulta obvio que en el polo N el potencial es un máximo, mientras que en el S se trata de un mínimo. En consecuencia, en N habrá un equilibrio inestable y en S será estable.



Se consideran las pequeñas oscilaciones de una estructura alrededor de su posición de equilibrio estable. El sistema está sometido a fuerzas exteriores $\{\mathbf{f}(t)\}$. *Expresar* las ecuaciones diferenciales de la dinámica en forma matricial. Supuestas conocidas las frecuencias propias y modos normales de vibración $\omega_i, \{\boldsymbol{a}_i\}, i = 1 \dots n$, *obtener la expresión* de dichas ecuaciones de forma desacoplada en función de las coordenadas normales. Suponiendo un pequeño amortiguamiento así como fuerzas exteriores armónicas $\{\mathbf{f}(t)\} = \{\mathbf{F}\} \operatorname{sen} \Omega t$, *obtener* la respuesta en régimen permanente. (5 ptos.)

Sea un sistema definido por coordenadas $\mathbf{q} = q_i$, $i = 1 \dots n$, con una posición de equilibrio estable en $\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Las ecuaciones de la dinámica para pequeñas oscilaciones (libres) en forma matricial son

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \mathbf{0}\,. \tag{1}$$

Las matrices $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{C}]$ y $[\mathbf{K}]$ son de orden $n \times n$ y están formadas respectivamente por los coeficientes de las aceleraciones, derivadas y coordenadas. La matriz de masas $[\mathbf{M}]$ se puede obtener derivando la energía cinética: $M_{ij} = \partial^2 T / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}$. En el caso de fuerzas que provienen de un potencial $V(\mathbf{q})$ la matriz de rigidez se puede obtener como las derivadas segundas del mismo, $K_{ij} = \partial^2 V / \partial q_i \partial q_j|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}$. Por último, $\mathbf{C}$ representa las fuerzas disipativas de tipo viscoso.

Si el sistema está sometido a fuerzas exteriores, la ecuación (3) se convierte en

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \mathbf{f}(t)\,. \tag{2}$$

Las frecuencias modos propios de vibración verifican

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_i\} = \omega_i^2 [\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_i\}$$

y permiten escribir la solución del problema sin amortiguamiento como

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i \mathbf{a}_i \operatorname{sen}(\omega_i t + \varphi_i)\,.$$

Cumplen una propiedad fundamental de ortogonalidad,

$$\{\mathbf{a}\}_i^{\mathrm{T}} [\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_i\}\{\mathbf{a}\}_j = \delta_{ij} M_i \quad (= 1 \text{ si } i = j \text{ e } = 0 \text{ si } i \neq j)\,.$$

Sustituyendo en la ecuación (3) (en la que despreciamos la contribución de $[\mathbf{C}]$) se obtiene

$$[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_j\} + \omega_j^2 [\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_j\} = \mathbf{0}\,. \tag{3}$$